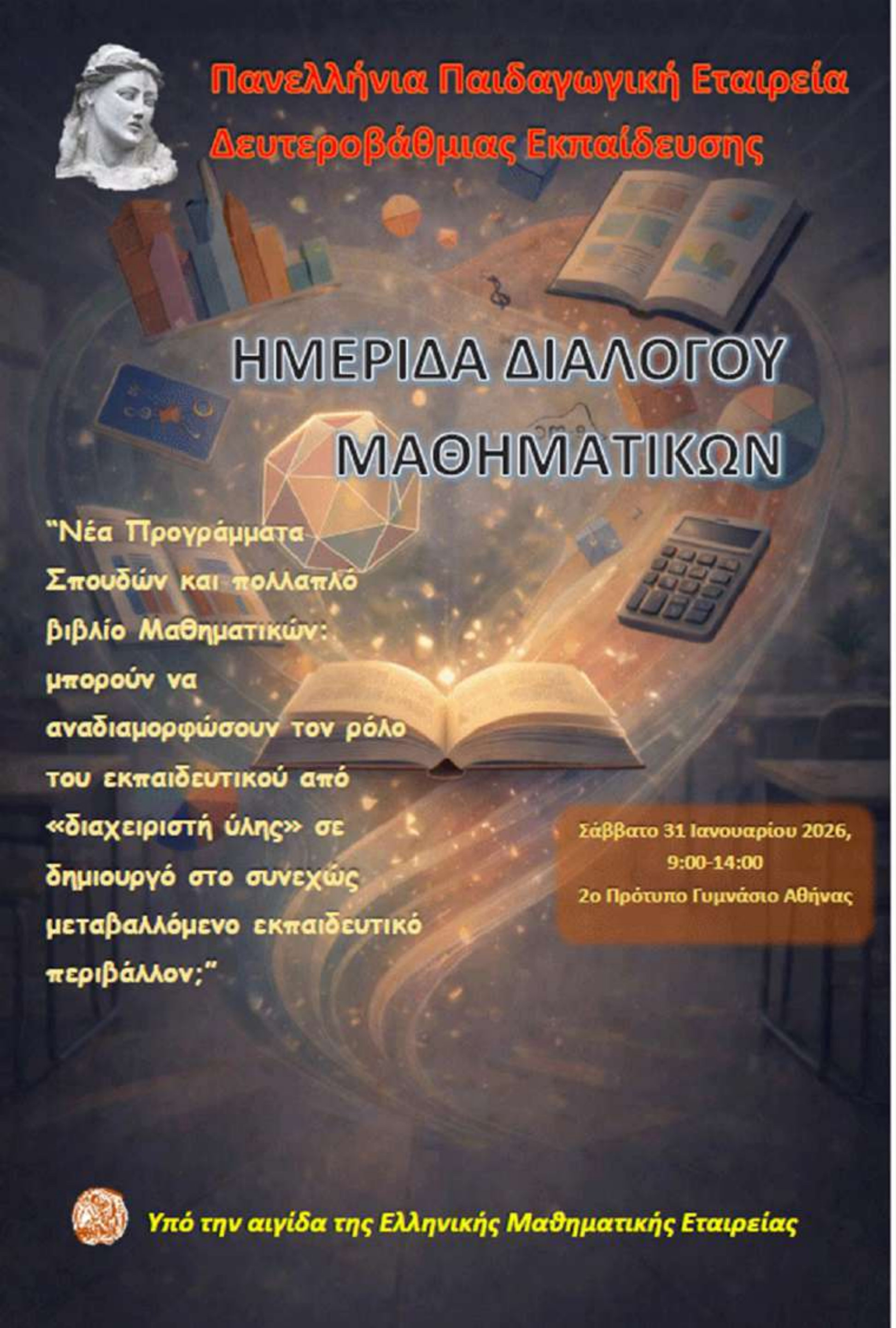


Νέα Προγράμματα Σπουδών για το Γυμνάσιο και το Λύκειο: ενδεικτικές προτάσεις διδακτικής διαχείρισης και ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών

Γιώργος Κόσυβας

Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών

Επόπτης Ποιότητας Εκπαίδευσης Β΄ Αθήνας

Οι άξονες της παρουσίασης

1. Εισαγωγή στα νέα ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου και Λυκείου.
2. Σκιαγράφηση παραδειγμάτων διδακτικής διαχείρισης και ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών από τα νέα ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου-Λυκείου.
3. Συμπεράσματα και προβληματισμοί.

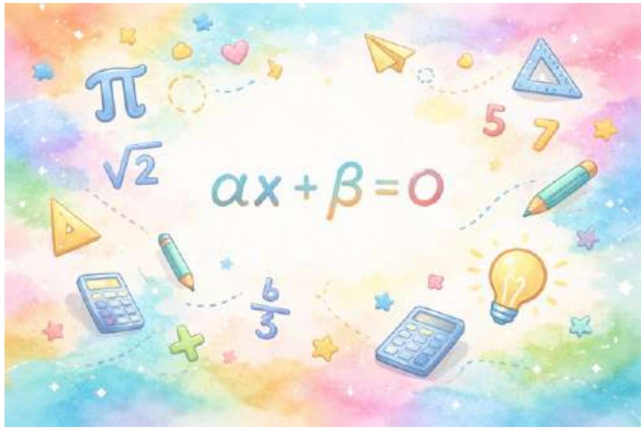
1
Εισαγωγή στα νέα ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου και Λυκείου

Υλικό αναφοράς για τα νέα ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου και Λυκείου

- Πόταρη, Δ., Ζωιτσάκος, Σ., Καμπούκος, Κ., Κόσυβας, Γ., Λουλάκης, Μ., Μεταξάς, Ν., & Τριανταφύλλου, Χ. (2022). *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικών Γυμνασίου* (2η έκδοση). Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.
- Ζαχαριάδης, Θ., Βλάχου, Α., Διαμαντίδης, Δ., Καραβασίλης, Γ., Κορρές, Κ., Μαστορίδης, Ε., Μπαλωμένου, Α., Μπαραλός, Γ., Περυσινάκη, Ε., Σιώπη, Κ., Σκουρκέας, Α., Σπάθης, Μ., Φουσκάκης, Δ. (2022). *Οδηγός εκπαιδευτικού Μαθηματικά Λυκείου*. 2η Έκδοση Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.
- ΙΕΠ. (2023α). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά Γυμνασίου.* Αθήνα: ΙΕΠ.
- ΙΕΠ. (2023β). *Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά Λυκείου.* Αθήνα: ΙΕΠ.
- Sakonidis, C., Potari, D., & Zachariades, T. (2022). Meeting the challenges of re-designing two mathematics curricula reforms in uncertain times. *Research in Mathematics Education*, *24*(2), 150–169.

Σκοπός των νέων ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου και Λυκείου

- **Προώθηση της συμπερίληψης:** Κεντρικός στόχος των νέων Προγραμμάτων Σπουδών είναι η υποστήριξη της μάθησης **όλων των μαθητών.** Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της εφαρμογής διαφοροποιημένων διδακτικών πρακτικών, οι οποίες **αναγνωρίζουν και σέβονται τη μαθησιακή και πολιτισμική ετερότητα.**
- **Ολοκληρωμένη ανάπτυξη ικανοτήτων:** Το νέο πλαίσιο αποσκοπεί στην καλλιέργεια **μαθηματικών γνώσεων, δεξιοτήτων και στάσεων**, ώστε οι μαθητές να είναι σε θέση να λύνουν σύνθετα προβλήματα, **τόσο στο πλαίσιο της μαθηματικής επιστήμης όσο και στην καθημερινή ζωή** (ΙΕΠ, 2023α; ΙΕΠ, 2023β).



Ταυτότητα και πλαίσιο των νέων ΠΣ Μαθηματικών

- **Σαφήνεια προσδοκιών:** Τα νέα Προγράμματα Σπουδών προσδιορίζουν με ακρίβεια τόσο **το περιεχόμενο** της διδασκαλίας όσο και τα **αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα.**
- **Υποστήριξη του διδακτικού έργου:** Παρέχουν ένα δομημένο και λειτουργικό πλαίσιο, **με πολλαπλά διδακτικά βιβλία, ΨΜΑ και εργαλεία** που ενισχύουν τον παιδαγωγικό σχεδιασμό και την αποτελεσματική διδασκαλία σε όλα τα επίπεδα τάξης.
- **Δικαίωμα στην ποιοτική μάθηση:** Διασφαλίζεται η ισότιμη πρόσβαση όλων των μαθητών στη μαθηματική γνώση, μέσα από **διδασκαλία υψηλών προδιαγραφών** (ΙΕΠ, 2023α· ΙΕΠ, 2023β).

Οι τρεις άξονες υλοποίησης των νέων ΠΣ

- **Ατομική μάθηση:** Ο μαθητής συμμετέχει ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία και οικοδομεί τη γνώση μέσα από **διερεύνηση και δράση.**
- **Συλλογική διάσταση:** Ενισχύεται ο μαθηματικός λόγος και η επικοινωνία, **με έμφαση στη συνεργασία** και στη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων.
- **Κριτική διάσταση:** Καλλιεργείται η κριτική σκέψη, ώστε τα Μαθηματικά να λειτουργούν **ως εργαλείο ανάλυσης και ερμηνείας του σύγχρονου κόσμου.**

Τα θεματικά πεδία στο νέο ΠΣ Μαθηματικών

- **Άλγεβρα**: Εξερεύνηση αλγεβρικών παραστάσεων, κανονικοτήτων, συναρτήσεων και αλγεβρικών σχέσεων (εξισώσεων, ανισώσεων).
- **Γεωμετρία-Μετρήσεις**: Μελέτη σχημάτων, χώρου και συμμετρίας.
- **Στοχαστικά Μαθηματικά**: Στατιστική, Πιθανότητες.

Αυτά τα πεδία του περιεχομένου περιλαμβάνουν θεμελιώδεις πτυχές της μαθηματικής σκέψης και εφαρμογής, αναδεικνύοντας **τη σημασία της κατανόησης δομών, σχέσεων και της ανάλυσης δεδομένων**, ενώ συνδέουν τη μαθηματική γνώση με πραγματικές καταστάσεις.

Τροχιά μάθησης και διδασκαλίας

Η τροχιά μάθησης και διδασκαλίας περιγράφει τη συνολική πορεία με την οποία οι μαθητές οικοδομούν μια **μαθηματική έννοια στον χρόνο**. Αποτυπώνει με σαφήνεια τι μαθαίνουν, με ποια σειρά, σε ποιο βάθος και με ποιες διδακτικές παρεμβάσεις.

- **Τι μαθαίνουν οι μαθητές (μαθηματικός σκοπός):** Η κεντρική μαθηματική ιδέα ή ο βασικός στόχος που οργανώνει κάθε διδακτική ενότητα.
- **Με ποια σειρά (επίπεδα σκέψης):** Σταδιακή και **σπειροειδής ανάπτυξη** των **Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) από τάξη σε τάξη**, με νοηματική συνέχεια.
- **Σε ποιο βάθος:** Προοδευτική εμβάθυνση στην κατανόηση και στη χρήση των μαθηματικών εννοιών, ανάλογα με το **αναπτυξιακό επίπεδο των μαθητών**.
- **Με ποιες διδακτικές παρεμβάσεις (εκπαιδευτικές ενέργειες):** Κατάλληλες **δράσεις του εκπαιδευτικού**, προσαρμοσμένες στο επίπεδο σκέψης και στις μαθησιακές ανάγκες των μαθητών.

Η διάρθρωση του ΠΣ αποτυπώνει τη σύνδεση των Θεματικών Πεδίων με τα ΠΜΑ και τις αντίστοιχες διδακτικές δράσεις

- **Θεματικά πεδία:** Τις κεντρικές γνωστικές περιοχές των Μαθηματικών.
- **Θεματικές ενότητες:** Την εξειδίκευση του μαθηματικού περιεχομένου ανά τάξη, οργανωμένη σε ευρύτερες ενότητες.
- **ΠΜΑ:** Τις συγκεκριμένες γνώσεις και δεξιότητες που επιδιώκεται να κατακτήσουν οι μαθητές.
- **Ενδεικτικές δραστηριότητες και πόροι:** Προτάσεις για διδακτικές ενέργειες, υλικό, μέσα και πηγές που υποστηρίζουν την επίτευξη των στόχων.

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΤΙΣ Α΄, Β΄ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΕΙΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Β΄ Μέρος

Αναλυτική Απεικόνιση του Προγράμματος Σπουδών

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ			
Θεματικό Πεδίο	**Θεματικές Ενότητες**	**Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
		Οι μαθητές/-τριες είναι σε θέση:	
ΑΡΙΘΜΟΙ	1. Φυσικοί αριθμοί.	Αρ.Φ.7.1. Να προσδιορίζουν το σύνολο των φυσικών αριθμών 0,1,2,3, … καθώς και τους άρτιους και περιττούς φυσικούς αριθμούς.	Έργα στα οποία η έμφαση είναι στη γενίκευση (ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης) όσο και στην αιτιολόγηση ισχυρισμών και την επιχειρηματολογία. Για παράδειγμα προβλήματα που χρειάζονται την ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, επιτρέπουν γενικεύσεις πχ. στην εύρεση του ΕΚΠ και ΜΚΔ και αιτιολογήσεις όπως γιατί ο 35 διαιρεί τον 19·7·2·5. Η χρησιμότητα άλλων αριθμητικών θεσιακών συστημάτων μπορεί να αναδειχθεί μέσα από παραδείγματα από ποικίλα πλαίσια (ιστορικά, από την πληροφορική, κρυπτογραφία
		Αρ.Φ.7.2. Να αναγνωρίζουν και να εκφράζουν συμβολικά την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης και να τη χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.	
		Αρ.Φ.7.3. Να εφαρμόζουν την έννοια της διαιρετότητας για να λύσουν προβλήματα.	

Τα ΠΜΑ στα νέα Προγράμματα Σπουδών

Η ταυτότητα των ΠΜΑ

- **Σαφής στοχοθεσία**
  Καθορίζεται με ακρίβεια τι *γνωρίζει*, *κατανοεί* και *εφαρμόζει* ο μαθητής.
- **Ουσιαστική σύνδεση**
  Οι μαθηματικές πρακτικές συνδέονται λειτουργικά με το γνωστικό περιεχόμενο.

Η καινοτομία των νέων ΠΣ

- **Από τη διδασκαλία στη μάθηση**
  Ο μαθητής οικοδομεί ενεργά τη γνώση — όχι απλή κάλυψη ύλης.
- **Από την αποστήθιση στη δράση**
  Έμφαση στη μαθηματική σκέψη, τη διερεύνηση και την επίλυση προβλημάτων.
- **Από το αφηρημένο στο αυθεντικό**
  Εφαρμογή των Μαθηματικών σε πραγματικά πλαίσια ζωής.

Βασικές συνιστώσες της μαθηματικής εκπαίδευσης

Το νέο ΠΣ οργανώνεται γύρω από τέσσερις αλληλένδετους άξονες οι οποίοι καθορίζουν τη διδακτική πράξη:

- **Περιεχόμενο και «Μεγάλες Ιδέες»:** Εστίαση στις θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες που διατρέχουν όλες τις βαθμίδες, εξασφαλίζοντας τη συνοχή της γνώσης.
- **Μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές:** Έμφαση στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές σκέφτονται, επικοινωνούν, επιχειρηματολογούν και επιλύουν προβλήματα.
- **Ψηφιακός και μαθηματικός γραμματισμός:** Ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών και της υπολογιστικής σκέψης ως οργανικά εργαλεία διερεύνησης και μάθησης.
- **Κοινωνικοσυναισθηματικές δεξιότητες:** Καλλιέργεια θετικής στάσης προς τα Μαθηματικά, ενίσχυση της αυτοπεποίθησης και ανάπτυξη συνεργατικών πρακτικών.

Οι «Μεγάλες Ιδέες» του νέου ΠΣ

Οι «Μεγάλες Ιδέες» αποτελούν τους θεμέλιους λίθους για την ενότητα και τη συνοχή της μαθηματικής γνώσης.

- **Μαθηματική δομή:** Σύνδεση αριθμητικών και αλγεβρικών εννοιών για την καλλιέργεια της συνδυαστικής σκέψης.
- **Γενίκευση και απόδειξη:** Εστίαση σε πρότυπα και αποδεικτικές διαδικασίες που προάγουν τη μαθηματική λογική.
- **Μεταβολή:** Μελέτη συναρτήσεων και μετασχηματισμών που αποκαλύπτουν τη δυναμική φύση των Μαθηματικών.
- **Ισοδυναμία:** Ανάδειξη της σημασίας της συμμετρίας και των σχέσεων ισοδυναμίας στην οργάνωση της μαθηματικής σκέψης.

Αυτές οι ιδέες αποτελούν τις **κεντρικές λεωφόρους**, οι οποίες ενοποιούν διαφορετικές ενότητες (π.χ. Γεωμετρία και Άλγεβρα) **σε ένα συνεκτικό σύνολο**.

Μαθηματικές διεργασίες (πρακτικές)

Οι καινοτομίες των νέων ΠΣ εστιάζουν στην ενεργητική εμπλοκή των μαθητών μέσω κρίσιμων διεργασιών (Sakonidis et al., 2022):

- **Δημιουργία συνδέσεων:** Συσχέτιση μαθηματικών εννοιών με την καθημερινή ζωή.
- **Συλλογισμός & Επιχειρηματολογία:** Ανάπτυξη λογικής σκέψης και αποδεικτικής ικανότητας.
- **Επικοινωνία & Οπτικοποίηση:** Χρήση μαθηματικού λόγου και πολλαπλών αναπαραστάσεων.
- **Επίλυση Προβλήματος & Μοντελοποίηση:** Επιλογή εργαλείων για τη διαχείριση σύνθετων καταστάσεων.
- **Μεταγνωστική δράση:** Βαθύτερη κατανόηση των εννοιών αντί για μηχανική εφαρμογή τύπων.

Στόχος: Η μετάβαση από τη στείρα απομνημόνευση στην καλλιέργεια δεξιοτήτων απαραίτητων για την ενήλικη ζωή (Ζαχαριάδης κ. ά., 2022; Πόταρη κ. ά., 2022).

Ενσωμάτωση Ψηφιακής Τεχνολογίας

Η τεχνολογία λειτουργεί ως δυναμικό εργαλείο διερεύνησης και οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης:

- **Δυναμική Γεωμετρία:** Χειρισμός αντικειμένων και διερεύνηση γεωμετρικών σχέσεων σε πραγματικό χρόνο.
- **Αλγεβρική Διερεύνηση:** Χρήση υπολογιστικών συστημάτων για τη βαθύτερη κατανόηση αλγεβρικών δομών.
- **Στατιστική Ανάλυση:** Πειραματισμός, προσομοίωση και επεξεργασία πραγματικών δεδομένων για την εξαγωγή συμπερασμάτων.
- **Ψηφιακή Μοντελοποίηση:** Ανάπτυξη και έλεγχος ψηφιακών μοντέλων για την επίλυση προβλημάτων.
- **Διαδραστικές Δραστηριότητες:** Υλοποίηση μελετημένων σεναρίων που προάγουν την αυτενέργεια (π.χ. διαδραστικά βίντεο, κουίζ, ανεστραμμένη τάξη).

Σύνοψη: Η τεχνολογία μετατρέπει την αφηρημένη έννοια σε οπτική και πειραματική εμπειρία.

Κοινωνικές και συναισθηματικές πρακτικές

Οι πρακτικές αυτές μετατρέπουν τα Μαθηματικά σε εργαλείο κατανόησης και παρέμβασης στον κόσμο:

Κοινωνικο-πολιτισμική διάσταση:

- **Κριτική επίγνωση:** Κατανόηση του ρόλου των Μαθηματικών σε κοινωνικά, περιβαλλοντικά και πολιτισμικά ζητήματα.
- **Αξιοποίηση διαλόγου:** Ανταλλαγή ιδεών, τεκμηριωμένη λήψη αποφάσεων και σεβασμός στη διαφορετική προσέγγιση.

Κοινωνικο-συναισθηματική ανάπτυξη:

- **Κίνητρα και επιμονή:** Καλλιέργεια θετικής στάσης και ανθεκτικότητας απέναντι στις μαθηματικές προκλήσεις.
- **Συνεργασία και αυτορρύθμιση:** Υποστήριξη της αλληλεπίδρασης στην ομάδα και ανάπτυξη δεξιοτήτων αυτοελέγχου της μάθησης.

Μαθηματικό όφελος: Οι μαθητές αποκτούν αυτοπεποίθηση και χρησιμοποιούν τη μαθηματική σκέψη ως εφόδιο για την ενεργή συμμετοχή τους στην κοινωνία.

Ο νέος ρόλος του εκπαιδευτικού

Στο σύγχρονο σχολείο, ο εκπαιδευτικός είναι **ενεργός σχεδιαστής**, υποστηρίζει τη μάθηση, θέτοντας τις βάσεις για την οικοδόμηση της γνώσης **από τους ίδιους τους μαθητές**. Οι βασικοί άξονες δράσης του περιλαμβάνουν:

- **Διευκόλυνση και υποστήριξη:** Οργάνωση **ενός περιβάλλοντος** που ενθαρρύνει τον μαθηματικό διάλογο. Ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει δραστηριότητες που προάγουν τη συλλογική σκέψη και την ανταλλαγή απόψεων.
- **Διαφοροποιημένη προσέγγιση:** Ανταπόκριση στις ιδιαίτερες ανάγκες και το **ρυθμό μάθησης κάθε μαθητή**. Στόχος είναι η ισότιμη συμμετοχή και η δραστήρια εμπλοκή ολόκληρης της τάξης στη διαδικασία.
- **Σύνδεση με το αυθεντικό πλαίσιο:** Συσχέτιση των μαθηματικών εννοιών με τις καθημερινές εμπειρίες και το πολιτισμικό υπόβαθρο των παιδιών, ώστε η γνώση να αποκτά νόημα.

Σχεδιασμός και διαχείριση του μαθηματικού έργου

- Ο αποτελεσματικός σχεδιασμός εστιάζει στην ποιότητα των ερεθισμάτων και στα εργαλεία που χρησιμοποιούνται στην τάξη:
- **Επιλογή ποιοτικών έργων:** Χρήση σύνθετων προβλημάτων που επιδέχονται **πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης**. Αυτά τα έργα αναδεικνύουν τις θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες αντί για την απλή αποστήθιση τύπων.
- **Στρατηγική ενσωμάτωση μέσων:** Αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων και αναπαραστάσεων όχι ως συμπληρωματικά μέσα, αλλά ως οργανικά στοιχεία που διευκολύνουν τη διερεύνηση.
- **Εστίαση στη διδακτική πλαισίωση:** Προτεραιότητα δίνεται στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές οικοδομούν τη γνώση και διαχειρίζονται τις δυσκολίες τους, παρά στην απλή εύρεση του σωστού αποτελέσματος.

Η μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών

- Η μάθηση είναι μια ενεργητική διαδικασία όπου ο μαθητής βρίσκεται στο επίκεντρο:
- **Διερεύνηση και αυτενέργεια:** Οι μαθητές **πειραματίζονται, διατυπώνουν και ελέγχουν εικασίες** και αναλαμβάνουν πρωτοβουλίες για την επίλυση προβλημάτων, αναπτύσσοντας την κριτική τους σκέψη.
- **Επικοινωνία και τεκμηρίωση:** Ανταλλαγή ιδεών μέσω του μαθηματικού λόγου. Οι μαθητές περνούν από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, χρησιμοποιώντας πολλαπλές αναπαραστάσεις.
- **Μεταγνωστική δράση:** Ανάπτυξη δεξιοτήτων αυτοελέγχου. Το λάθος δεν αντιμετωπίζεται ως αποτυχία, αλλά ως δημιουργικό εργαλείο για την εμβάθυνση στην κατανόηση και τη βελτίωση της σκέψης.

Ο Οδηγός Εκπαιδευτικού στα νέα ΠΣ

- **Μετάβαση στη νέα κουλτούρα μάθησης:** Λειτουργεί ως πρακτικό εργαλείο για τη μετάβαση από την παραδοσιακή μετάδοση της ύλης στην οργάνωση ενεργητικών μαθησιακών εμπειριών.
- **Μεθοδολογική υποστήριξη:** Προσφέρει ένα συνεκτικό πλαίσιο για τον **σχεδιασμό διερευνητικών μαθημάτων**, ενσωματώνοντας στρατηγικές χρήσης ψηφιακών μέσων και πολλαπλών αναπαραστάσεων.
- **Συνεχής ανατροφοδότηση:** Παρέχει κατευθύνσεις για τη **διαμορφωτική αξιολόγηση**, εστιάζοντας στην παρακολούθηση της προόδου του μαθητή και στην εξατομικευμένη υποστήριξη.

Η διδακτική διαχείριση είναι η δυναμική ισορροπία ανάμεσα στον σχεδιασμό του έργου, την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού και την ενεργή δράση του μαθητή.

2

Σκιαγράφηση παραδειγμάτων διδακτικής διαχείρισης και ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών από τα νέα ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου-Λυκείου

Πρόταση 1: Μαθηματική δομή - Γενίκευση γραμμικής κανονικότητας

Άλγεβρα (Β΄ Γυμνασίου)

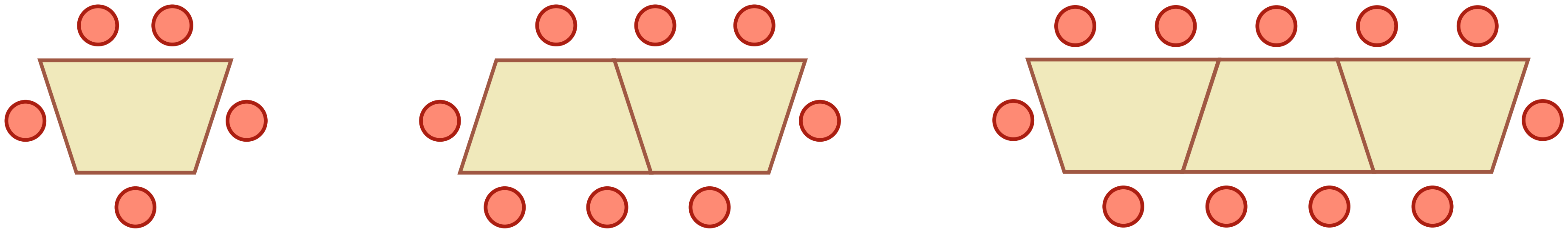
Κανονικότητες

Αλ.Κ.8.1. Να λύνουν προβλήματα που συναντούν στα Μαθηματικά και την καθημερινή ζωή με κανονικότητες της μορφής $\alpha \cdot \nu + \beta$ όπου α και β ρητοί αριθμοί.

Αλ.Κ.8.2. Να διατυπώνουν επιχειρήματα και να αιτιολογούν τους συλλογισμούς τους σχετικά με τον προσδιορισμό μιας κανονικότητας.

Πρόβλημα για διερεύνηση: γραμμική αριθμητική κανονικότητα

Μαθηματικό Έργο: Είσαστε ιδιοκτήτης ή ιδιοκτήτρια εστιατορίου. Διαθέτετε μικρά τραπέζια σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου που χωρούν ένα άτομο στις τρεις πλευρές και δύο στη μεγάλη. Τα τραπέζια μπορούν να ενωθούν μεταξύ τους για να σχηματίσουν μεγαλύτερα. **Το μοτίβο συνεχίζεται και για τους όρους που δεν δίνονται στην εικόνα.**



1ος όρος 2ος όρος 3ος όρος

α) Να σχεδιάσετε τα τραπέζια των δύο επόμενων όρων και να παρατηρήσετε με προσοχή τους διαδοχικούς όρους.
β) Πώς μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των ατόμων που μπορούν να καθίσουν σε 4 τραπέζια; Σε 6 τραπέζια; **Να διατυπώσετε με λόγια** τον κανόνα εύρεσης του επόμενου όρου **αν γνωρίζουμε τον προηγούμενο.**
γ) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών. Ποιον κανόνα θα χρησιμοποιήσετε για να τον συμπληρώσετε;

Σειρά του όρου (ν)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Πλήθος των ατόμων										

δ) Πόσα άτομα μπορούν να καθίσουν **σε 100 τραπέζια;**

Από το μοτίβο στην αλγεβρική γενίκευση

- **Καλλιέργεια γεωμετρικής οπτικοποίησης.** Η σχεδίαση των επόμενων όρων βοηθά τους μαθητές να αντιληφθούν τη "δομική μονάδα" του μοτίβου, παρατηρώντας **ποιες θέσεις παραμένουν σταθερές και ποιες προστίθενται σε κάθε νέα ένωση τραπεζιών.**
- **Μετάβαση από τη λεκτική στην αλγεβρική γενίκευση.** Η περιγραφή του **κανόνα του επόμενου όρου** με λόγια (π.χ. "**προσθέτω 3 θέσεις για κάθε νέο τραπέζι**") προετοιμάζει το έδαφος για τον αλγεβρικό τύπο **y=3ν+ 2**, συνδέοντας την επαγωγική σκέψη με τον μαθηματικό συμβολισμό.
- **Ανάδειξη της χρησιμότητας του γενικού τύπου.** Η εφαρμογή του μοτίβου σε μεγάλες τιμές, όπως τα 100 τραπέζια, αναδεικνύει την ανάγκη μετάβασης από την καταμέτρηση σε μια **στρατηγική υπολογισμού** που εξασφαλίζει ταχύτητα και ακρίβεια.

Πρόταση 2
Αιτιολόγηση ιδιοτήτων γεωμετρικού σχήματος

Διερεύνηση ιδιοτήτων (Α΄ Γυμνασίου)

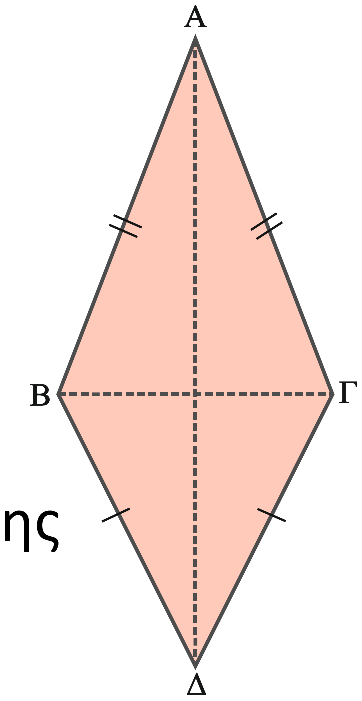
ΠΜΑ (Α΄ Γυμνασίου) – Χαρακτηριστική ιδιότητα μεσοκαθέτου

Γ.Ε.7.3. Να αναγνωρίζουν και να περιγράφουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος και την ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου γωνίας.

Γ.Ε.7.4. Να εφαρμόζουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος για να αναγνωρίζουν ιδιότητες του ισοσκελούς και του ισόπλευρου τριγώνου.

Γ.Ε.7.16. Να αξιοποιούν τις ιδιότητες της μεσοκαθέτου, της παραλληλίας και της καθετότητας ευθειών και των παραλληλογράμμων στην επίλυση απλών προβλημάτων.

Μεσοκάθετος (Α' Γυμνασίου)



Μαθηματικό Έργο: *Σκεφτείτε το σχήμα με κορυφές Α, Β, Δ, Γ. Οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι ίσες. Οι πλευρές ΔΒ και ΔΓ είναι επίσης ίσες. Τι μπορείτε να πείτε για τις διαγωνίους ΑΔ και ΒΓ;*

Διδακτική διαχείριση στην Α' Γυμνασίου.

- **Πειραματισμός και υπόθεση:** Μετρήσεις με δυναμικό λογισμικό για εντοπισμό της αναλλοίωτης ιδιότητας της ισαπόστασης των σημείων Α και Δ από τα άκρα Β, Γ.

- **Καθοδηγούμενη ανακάλυψη:** Ο εκπαιδευτικός θέτει διερευνητικά ερωτήματα που καθοδηγούν τους μαθητές να περάσουν από την εμπειρική παρατήρηση στη μαθηματική γενίκευση: **η μεσοκάθετος ορίζεται μονοσήμαντα από τα δύο αυτά σημεία.**
- **Επαλήθευση και τεκμηρίωση:** Η δραστηριότητα ολοκληρώνεται με τη σύνδεση των ευρημάτων με τον ορισμό της μεσοκαθέτου ως γεωμετρικού τόπου, **αποδεικνύοντας** άμεσα την **καθετότητα των διαγωνίων.**
- **Σημείωση:** Η προσέγγιση αυτή στην Α' Γυμνασίου θεμελιώνει την εννοιολογική κατανόηση της μεσοκαθέτου, προετοιμάζοντας το έδαφος για την τυπική απόδειξη μέσω της **ισότητας τριγώνων** που θα ακολουθήσει στη **Γ' Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου.**

Παράδειγμα 3 Ερωτήματα για στατιστική έρευνα

Διατύπωση στατιστικών ερωτημάτων (Α΄, Β΄, Γ΄ Γυμνασίου)

ΠΜΑ (Α΄ Γυμνασίου) – Διαχείριση δεδομένων.

Σ.Δ.7.1. Να διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνεχή ποσοτικά δεδομένα από το οικείο περιβάλλον τους.

ΠΜΑ (Β΄ Γυμνασίου) – Διαχείριση δεδομένων.

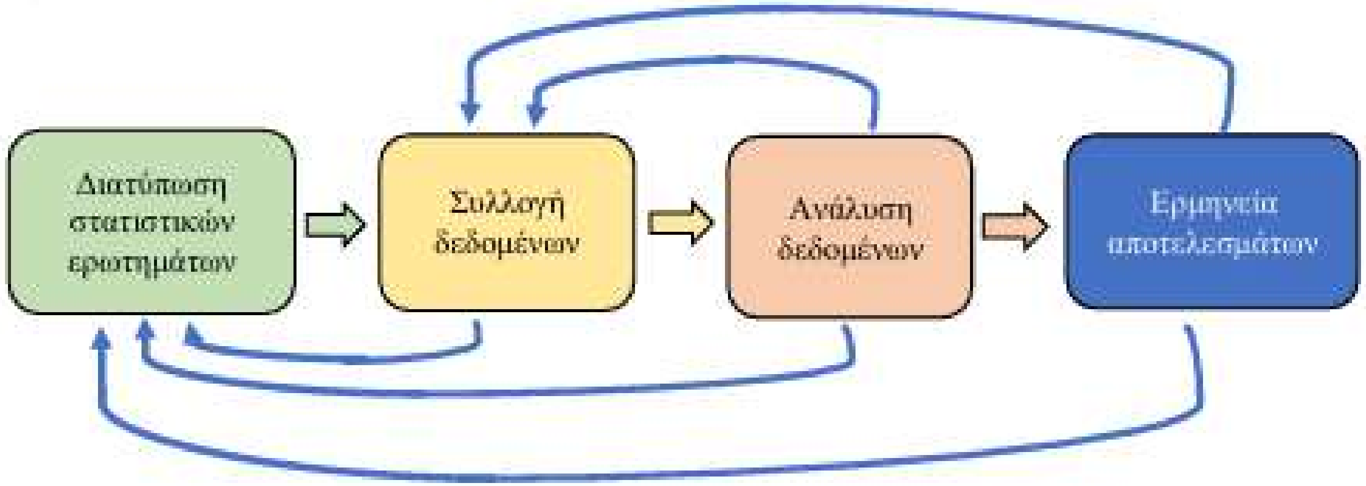
Σ.Δ.8.1. Να διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα.

ΠΜΑ (Γ΄ Γυμνασίου) – Διαχείριση δεδομένων.

Σ.Δ.9.1. Να διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους.

Τι είναι στατιστικό ερώτημα;

- **Ορισμός:** Ένα ερώτημα είναι στατιστικό όταν οι απαντήσεις **ποικίλλουν** ανάλογα με το άτομο ή τη χρονική στιγμή και δεν υπάρχει μοναδική απάντηση.
- **Παράδειγμα μη στατιστικού ερωτήματος:** «*Πόσες ημέρες έχει η εβδομάδα;*» (μοναδική απάντηση).
- **Παράδειγμα στατιστικού ερωτήματος:** «*Πόσα κατοικίδια έχετε;*» «*Ποιο είναι το ύψος των μαθητών της Τρίτης Γυμνασίου σε σχολεία του Δήμου σας;*» (οι απαντήσεις διαφέρουν από άτομο σε άτομο).



Στάδια διαδικασίας επίλυσης στατιστικού προβλήματος ΟΕ, σ. 95

Εξέλιξη στατιστικών ερωτημάτων στον ΟΕ (σσ 128-129)

- *Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά δεδομένα:* Ποια είναι τα αγαπημένα αθλήματα των μαθητών της τάξης τους; (Α΄ Δημοτικού)
- *Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά δεδομένα:* Πόσες μπάλες ομαδικών αθλημάτων (π.χ. μπάσκετ, ποδοσφαίρου κλπ.) έχουν στο σπίτι τους; (Β΄ Δημοτικού)
- *Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με διακριτά ποσοτικά ή κατηγορικά δεδομένα:* Πόσες χώρες κέρδισαν χάλκινα, ασημένια, χρυσά μετάλλια στους τελευταίους Ολυμπιακούς αγώνες; (Γ΄ Δημοτικού)
- *Ερωτήματα που αφορούν συγκρίσεις κατηγορικών ή διακριτών ποσοτικών δεδομένων σε δύο μικρές ομάδες ίσου πλήθους:* Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των κοριτσιών και των αγοριών της τάξης τους; (Δ΄ Δημοτικού)
- *Ερωτήματα που αφορούν ποσοτικά δεδομένα τα οποία ομαδοποιούνται:* Πόσες εύστοχες βολές επιτυγχάνει, σε 100 προσπάθειες, ο κάθε μαθητής της τάξης τους σε ένα διαγωνισμό στο μπάσκετ; (Ε΄ Δημοτικού)
- *Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνδυασμό διακριτών ποσοτικών και κατηγορικών δεδομένων:* Πόσες εύστοχες βολές επιτυγχάνει, σε 100 προσπάθειες, ο κάθε μαθητής της Γ΄ Δημοτικού και της ΣΤ΄ Δημοτικού σε ένα διαγωνισμό στο μπάσκετ; (ΣΤ΄ Δημοτικού)
- *Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με συνεχή ποσοτικά δεδομένα από το οικείο περιβάλλον τους:* Ποιες ήταν οι επιδόσεις των μαθητών της τάξης τους στο αγώνισμα του μήκους; (Α΄ Γυμνασίου)
- *Ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με απογραφικά χρονικά δεδομένα:* Πόσες χώρες έλαβαν μέρος στους σύγχρονους Ολυμπιακούς αγώνες (1896-σήμερα) και πόσες κέρδισαν μετάλλια; (Β΄ Γυμνασίου)
- *Ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και απαντώνται με δεδομένα εκτός του οικείου περιβάλλοντός τους:* Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των εφήβων; (Γ΄ Γυμνασίου)
- *Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ ενός ποσοτικού και ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού του πληθυσμού:* Ποιες είναι οι επιδόσεις των εφήβων αγοριών και κοριτσιών αθλητών/τριών στο αγώνισμα του μήκους; (Α΄ Λυκείου)
- *Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού:* Ποιο είναι το αγαπημένο άθλημα των εφήβων αγοριών και κοριτσιών; (Β΄ Λυκείου)
- *Ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού:* Ποιες είναι οι επιδόσεις των εφήβων στο αγώνισμα του μήκους και στο τριπλούν; (Γ΄ Λυκείου)

- **Δημοτικό**: Μετάβαση από **κατηγορικά δεδομένα (Α'-Β')** σε συγκρίσεις ομάδων και **ομαδοποίηση ποσοτικών δεδομένων (Δ'-ΣΤ').**
- **Γυμνάσιο**: Εισαγωγή **συνεχών ποσοτικών δεδομένων** και διερεύνηση ερωτημάτων στο **ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον.**
- **Λύκειο**: Μελέτη **σχέσεων εξάρτησης μεταξύ ποσοτικών** και **κατηγορικών χαρακτηριστικών** του πληθυσμού.

Παράδειγμα 4
Στοχαστική διερεύνηση και οπτικοποίηση

Ανεξάρτητα και εξαρτημένα ενδεχόμενα (Γ΄ Γυμνασίου)

ΠΜΑ (Γ΄ Γυμνασίου) – Συσχέτιση.

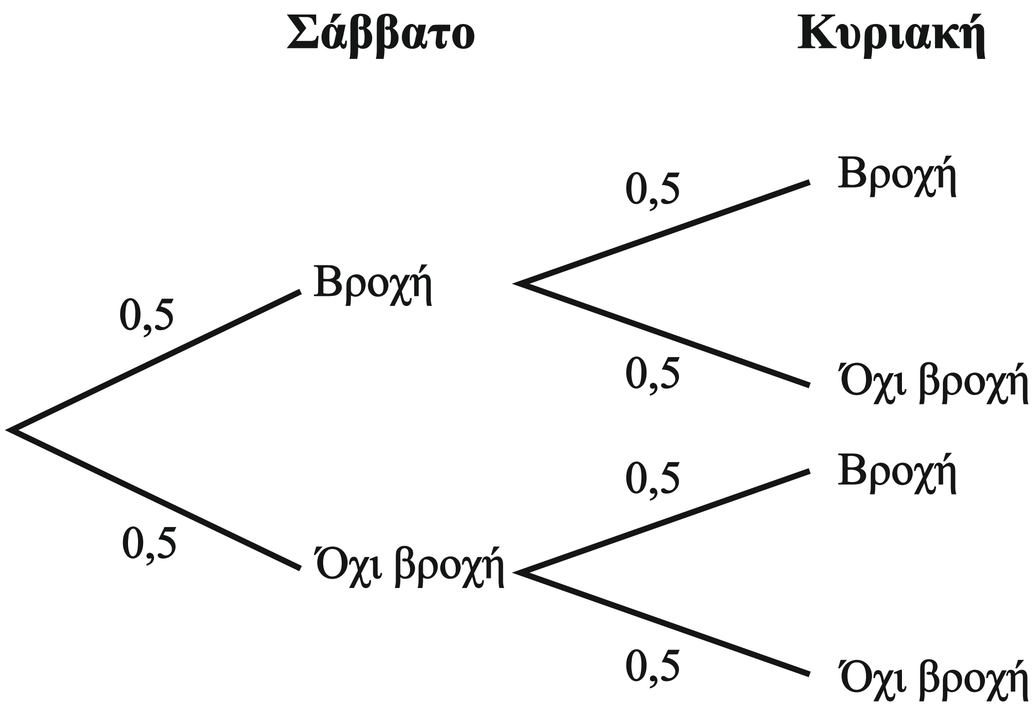
Π.Σ.9.1. Να διερευνούν την ανεξαρτησία ενδεχομένων μέσα από την εκτέλεση πειραμάτων τύχης και προσομοιώσεων.

Πιθανότητες (Συσχέτιση): Ανεξαρτησία ενδεχομένων. (Γ΄ Γυμνασίου)

Μαθηματικό έργο για προβληματισμό: Ο εκφωνητής του δελτίου καιρού. *Στο δελτίο καιρού ανακοινώθηκε 50% πιθανότητα βροχής για το Σάββατο και 50% για την Κυριακή. Ο εκφωνητής συμπέρανε ότι η πιθανότητα βροχής για το σαββατοκύριακο είναι 100%.*

α) *Να εξηγήσετε το λογικό σφάλμα του ισχυρισμού.*

β) *Να υπολογίσετε την πιθανότητα να βρέξει τουλάχιστον μία ημέρα.*



α) Το λάθος του εκφωνητή έγκειται στο ότι **πρόσθεσε τις πιθανότητες δύο ανεξάρτητων ενδεχομένων** (50% + 50% = 100%), σαν να ήταν βέβαιο ότι θα βρέξει. Αυτό είναι λάθος γιατί η πιθανότητα βροχής την Κυριακή δεν εξαρτάται από το αν έβρεξε το Σάββατο.

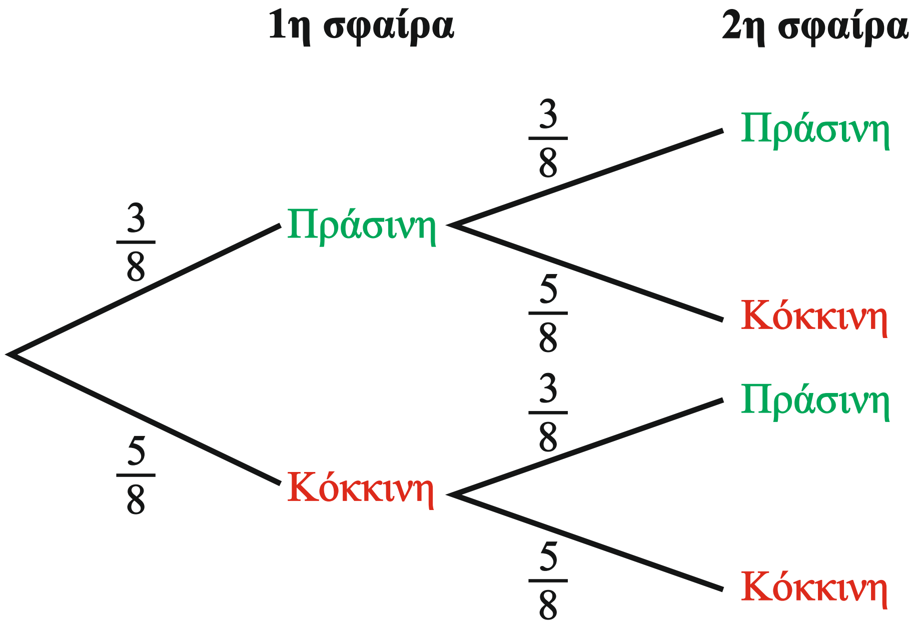
β) Μέσω του δενδροδιαγράμματος, οι μαθητές οδηγούνται στη χρήση του συμπληρωματικού ενδεχομένου: η πιθανότητα "τουλάχιστον μία βροχή" ισούται με 1 μείον την πιθανότητα "καθόλου βροχή" **(1 - 0,25 = 0,75 ή 75%).**

Μαθηματικό έργο 1: Ανεξάρτητα ενδεχόμενα (με επανατοποθέτηση)

*Σε κουτί υπάρχουν **3 πράσινες** και **5 κόκκινες** σφαίρες. Επιλέγουμε μία σφαίρα, καταγράφουμε το χρώμα της και **την επιστρέφουμε στο κουτί**. Στη συνέχεια, επιλέγουμε δεύτερη σφαίρα.*

α) *Ποια είναι η πιθανότητα να είναι **και οι δύο σφαίρες κόκκινες;***

β) *Γιατί τα ενδεχόμενα αυτά θεωρούνται ανεξάρτητα;*



Εάν έχουμε **επανατοποθέτηση** της πρώτης σφαίρας, τότε θα υπάρχουν πάλι στο κουτί 8 σφαίρες, 5 από τις οποίες είναι κόκκινες και 3 πράσινες. Επομένως, το χρώμα της πρώτης σφαίρας που βγάλαμε δεν έχει επίδραση στην πιθανότητα της δεύτερης σφαίρας να είναι κόκκινη ή πράσινη, έτσι **τα δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.**

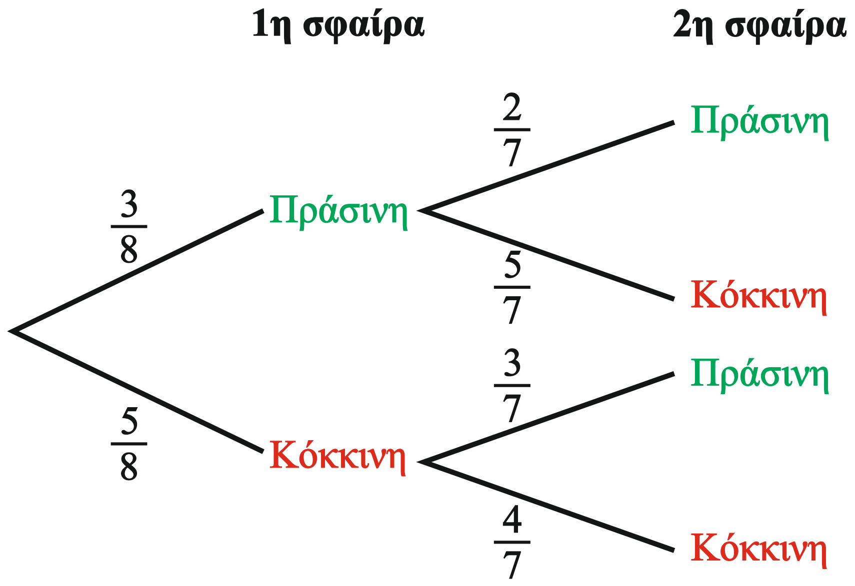
$$P(KK) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$$

Μαθηματικό έργο 2: Εξαρτημένα ενδεχόμενα (χωρίς επανατοποθέτηση)

*Σε κουτί υπάρχουν **3 πράσινες** και **5 κόκκινες** σφαίρες. Επιλέγουμε δύο σφαίρες διαδοχικά, **χωρίς να επιστρέψουμε την πρώτη στο κουτί.***

α) *Ποια είναι η πιθανότητα να είναι **και οι δύο σφαίρες κόκκινες;***

β) *Γιατί τα ενδεχόμενα αυτά χαρακτηρίζονται ως εξαρτημένα;*



Εάν δεν έχουμε επανατοποθέτηση της πρώτης σφαίρας, τότε γνωρίζουμε ότι θα υπάρχουν στο κουτί **7 σφαίρες**. Όμως αν δεν γνωρίζουμε το χρώμα της πρώτης σφαίρας που βγάλαμε, δεν γνωρίζουμε αν υπάρχουν 4 ή 5 κόκκινες σφαίρες, έτσι ο αριθμός των κόκκινων σφαιρών εξαρτάται από το χρώμα της πρώτης σφαίρας . Με τον ίδιο τρόπο ο αριθμός των πράσινων σφαιρών που έχουν μείνει εξαρτάται από το χρώμα της πρώτης σφαίρας που βγάλαμε. Σε αυτή την περίπτωση τα ενδεχόμενα **δεν είναι ανεξάρτητα**.

$$P(KK) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

Παράδειγμα 5
Λύση ρεαλιστικού προβλήματος και μαθηματική μοντελοποίηση

Αριθμοί-Άλγεβρα (Α και Β΄ Λυκείου ΓΠ) (*Τετραγωνική ρίζα, άρρητη εξίσωση*)

Αρ.Π.10.8. Χρησιμοποιούν τον ορισμό και τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων.

Αλ.Σρ.10.9. Χρησιμοποιούν πολυωνυμικές συναρτήσεις 1ου και 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.

Αλ.Σχ.11.6. Επιλύουν εξισώσεις με ριζικά.

Ο Κύκλος μαθηματικής μοντελοποίησης

Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι μια κυκλική διαδικασία επίλυσης προβλημάτων του πραγματικού κόσμου μέσω των Μαθηματικών. Τα βασικά της στάδια είναι τα εξής:

- **Διατύπωση:** Μετάφραση ενός προβλήματος της καθημερινότητας σε μαθηματικό πρόβλημα, επιλέγοντας τις κατάλληλες πληροφορίες και εργαλεία.
- **Εφαρμογή:** Επίλυση του μαθηματικού προβλήματος με τη χρήση γνωστών μεθόδων και τύπων.
- **Ερμηνεία:** Επεξήγηση της μαθηματικής λύσης με βάση τα δεδομένα της αρχικής πραγματικής κατάστασης.
- **Αξιολόγηση:** Έλεγχος της λογικής και της χρηστικότητας της λύσης.

Η διαδικασία δεν είναι αυστηρά γραμμική, καθώς επιτρέπει την επιστροφή σε προηγούμενα στάδια για τη διόρθωση υποθέσεων και τη βελτίωση του μοντέλου.

OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework-Mathematics, Reading, Science, Problem solving and Financial literacy*. OECD.

de Lange, J. (1989). Trends and barriers to applications and modelling in mathematics curricula. In W. Blum, M. Niss, & I. D. Huntley (Eds.), *Modelling, applications and applied problem solving* (pp. 196–204). Chichester: Ellis Horwood.

Μαθηματική μοντελοποίηση (Pisa 2000)

Μοντελοποίηση της πραγματικής ζωής. Ένα από τα επακόλουθα υπερθέρμανσης του πλανήτη μας είναι το λιώσιμο των πάγων. Δώδεκα χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων αρχίζουν να αναπτύσσονται στους βράχους μικροσκοπικά φυτά που ονομάζονται λειχήνες. Κάθε λειχήνα αναπτύσσεται περίπου σε κυκλικό σχήμα. Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί, κατά προσέγγιση, η διάμετρος (δ) της λειχήνας σε σχέση με την ηλικία της:

$$\delta = 7\sqrt{t-12} \text{ για } t \geq 12$$

Όπου δ η διάμετρος της λειχήνας σε mm και t ο αριθμός των ετών που έχουν περάσει από το λιώσιμο των πάγων.

α) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο, να υπολογίσετε τη διάμετρο που θα έχει μία λειχήνα, 16 έτη μετά το λιώσιμο των πάγων.

β) Η Αννα μέτρησε τη διάμετρο μίας λειχήνας που βρήκε σε κάποιο μέρος και διαπίστωσε ότι ήταν 28 mm. Πόσα χρόνια έχουν περάσει από το λιώσιμο των πάγων σε αυτό το μέρος; Να εξηγήσετε πώς βρήκατε την απάντησή σας.

γ) Σε πόσα χρόνια από σήμερα μία λειχήνα που έχει διάμετρο 35 mm θα διπλασιάσει τη διάμετρό της; Να εξηγήσετε πώς βρήκατε την απάντησή σας. **(Διαγωνισμός PISA 2000)**

Τράπεζα θεμάτων (Α΄ και Β΄ Λυκείου ΓΠ)

ΘΕΜΑ 4 (Pisa, 2000): *Ένα από τα επακόλουθα της υπερθέρμανσης του πλανήτη μας είναι το λιώσιμο των πάγων. Δώδεκα χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων αρχίζουν να αναπτύσσονται στους βράχους μικροσκοπικά φυτά, που ονομάζονται λειχήνες. Κάθε λειχήνα αναπτύσσεται σε σχήμα περίπου κυκλικό. Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται, για να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η διάμετρος (δ) της λειχήνας σε σχέση με την ηλικία της:*

$$\delta(t)=7\cdot\sqrt{t-12},$$

όπου δ η διάμετρος της λειχήνας σε mm και t ο αριθμός των χρόνων που έχουν περάσει μετά το λιώσιμο των πάγων.

α) *Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.*

β) *Ποια είναι η διάμετρος που θα έχει μια λειχήνα 16 χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων;*

γ) *Η Άννα μέτρησε τη διάμετρο μιας λειχήνας που βρήκε σε κάποιο μέρος και είδε ότι ήταν $35mm$. Πόσα χρόνια έχουν περάσει από το λιώσιμο των πάγων σε αυτό το μέρος;*

δ) *Αν μια λειχήνα διπλασίασε την επιφάνειά της τα τελευταία 6 χρόνια, πριν από πόσα χρόνια δημιουργήθηκε;*

Δίνεται ότι η επιφάνεια κύκλου με διάμετρο δ είναι : $\mathrm{E}=\pi\cdot\dfrac{\delta^2}{4}.$

Μαθηματική μοντελοποίηση (Α και Β΄ Λυκείου ΓΠ)

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον οι λειχήνες αρχίζουν να αναπτύσσονται 12 χρόνια μετά το λιώσιμο των πάγων, θα είναι $t \geq 12$ και ισχύει $t - 12 \geq 0$, άρα ορίζεται η ρίζα. Οπότε το πεδίο ορισμού είναι $A = [12, +\infty)$.

β) Για $t = 16$, $\delta(16) = 7 \cdot \sqrt{16 - 12} = 7 \cdot \sqrt{4} = 7 \cdot 2 = 14$, η διάμετρος **μετά από 16 χρόνια θα είναι $\mathbf{14}\boldsymbol{mm}$.**

γ) Έχουμε $35 = 7 \cdot \sqrt{t - 12}$, δηλαδή $\sqrt{t - 12} = 5$, οπότε $t - 12 = 25$ και $\boldsymbol{t} = \mathbf{37}$.

Κύκλος Μαθηματικής Μοντελοποίησης

1. Πραγματική κατάσταση. Βρήκαμε μια λειχήνα με διάμετρο 35 mm πάνω σε έναν βράχο. Η διάμετρος d παίρνει την τιμή 35. Ζητούμε την τιμή του χρόνου t που ικανοποιεί τη σχέση.

2. Κατασκευή ενός μοντέλου. Μεταλαβαίνουμε από τον βράχο στα Μαθηματικά. Μεταφράζουμε την πραγματική κατάσταση με τη συνάρτηση:

$$\delta(t) = 7 \cdot \sqrt{t-12}$$

3. Εφαρμογή (Μαθηματική επίλυση)

Κάνουμε αντικατάσταση: $35 = 7 \cdot \sqrt{t-12}$

Βήμα 1:

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το 7: $5 = \sqrt{t-12}$

Βήμα 2:

Υψώνουμε στο τετράγωνο: $5 = \left(\sqrt{t-12}\right)^2$

ή $25 = t - 12$

Βήμα 3:

Λύνουμε ως προς t: $t = 25 + 12$ ή $\mathbf{t = 37}$

4. Ερμηνεία και έλεγχος της λύσης

Η λειχήνα έχει ηλικία 37 ετών. Άρα ο πάγος υποχώρησε από το σημείο αυτό πριν από 37 χρόνια.

Η τιμή t = 37 είναι μεγαλύτερη από το 12 (έτος έναρξης ανάπτυξης), **άρα το αποτέλεσμα είναι αποδεκτό και εντός των ορίων του μοντέλου.** Αν το t ήταν μικρότερο από 12, τότε το μοντέλο ή η μέτρηση θα ήταν λανθασμένα.

δ) Αν έχουν περάσει t χρόνια από το λιώσιμο των πάγων και έχει διπλασιάσει την επιφάνειά της μέσα στα τελευταία 6 χρόνια

θα έχουμε: $E = \pi \cdot \rho^2 \ = \pi \cdot \frac{\delta^2}{4}$.

Για t χρόνια από το λιώσιμο των πάγων, η διάμετρος της λειχήνας είναι $\delta(t) = \ 7 \cdot \sqrt{t-12}$ και η επιφάνειά της :

$$E = \pi \cdot \frac{(\delta(t))^2}{4}.$$

Πριν από 6 χρόνια η διάμετρος ήταν $\delta(t-6) = 7 \cdot \sqrt{t-6-12} = 7\sqrt{t-18}$ και η επιφάνεια ήταν $E = \ \pi \cdot \frac{\left(\delta(t-6)\right)^2}{4}$.

Εφόσον διπλασιάστηκε σε αυτά τα 6 χρόνια, θα ισχύει: $\pi \cdot \frac{(\delta(t))^2}{4} = 2 \cdot \ \pi \cdot \frac{(\delta(t-6))^2}{4}$, $(\delta(t))^2 = 2 \cdot (\delta(t-6))^2$,

$$49 \cdot \sqrt{t-12}^2 \ = 2 \cdot 49 \cdot \sqrt{t-18}^2 \ t - 12 = 2(t-18), t - 12 = 2t - 36$$

$$36 - 12 = 2t - t, \boldsymbol{t = 24}.$$

Άρα έχουν περάσει **24 χρόνια** από το λιώσιμο των πάγων.

Παράδειγμα 6
Επικοινωνία, συλλογισμός και επιχειρηματολογία

Πυθαγόρειο Θεώρημα
(Β΄ Γυμνασίου και Β΄ Λυκείου ΓΠ)

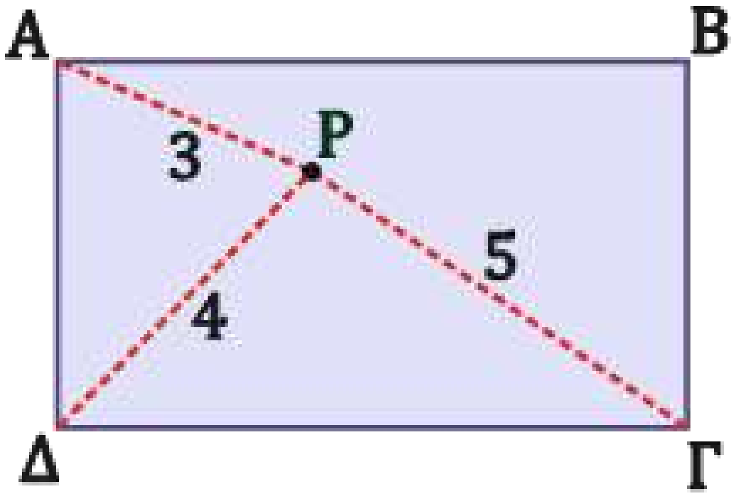
Γ.Ε.8.2. Να διερευνούν και να διατυπώνουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του και να τα χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό μηκών και τον προσδιορισμό ορθής γωνίας τριγώνου, αντίστοιχα.

Γ.Ε.11.9. Αποδεικνύουν τις μετρικές σχέσεις σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Διατυπώνουν το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος και το αναγνωρίζουν ως κριτήριο καθετότητας.

Γ.Ε.11.10. Χρησιμοποιούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του για την επίλυση μαθηματικών και ρεαλιστικών προβλημάτων.

Ένα ανοιχτό πρόβλημα!

Ανοιχτό πρόβλημα: *Δίνεται σημείο P στο εσωτερικό ορθογωνίου ΑΒΓΔ, έτσι ώστε PA = 3, PΔ = 4 και PΓ =5. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος PB.*



- Η λύση $PB = 3\sqrt{2}$ (περίπου 4,24) προκύπτει από την εξίσωση $3^2 + 5^2 = PB^2 + 4^2$.
- Η ουσία της διδασκαλίας έγκειται στην ανακάλυψη της σχέσης: $PA^2 + P\Gamma^2 = PB^2 + P\Delta^2$.
- Η σχέση αυτή, γνωστή και ως θεώρημα των «βρετανικών σημαιών», αποδεικνύεται με τη χρήση προβολών στις πλευρές του ορθογωνίου και την εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Η μέθοδος "What-If-Not" ως εργαλείο ανακάλυψης

Η μέθοδος **"What-If-Not"** των Brown και Walter αποτελεί μια στρατηγική μετασχηματισμού ενός δεδομένου προβλήματος μέσω της αμφισβήτησης των παραδοχών του. Αντί οι μαθητές να περιορίζονται στην εύρεση μιας λύσης, καλούνται να καταγράψουν τις ιδιότητες του προβλήματος και στη συνέχεια να αναρωτηθούν: "**Τι θα συνέβαινε αν αυτή η ιδιότητα δεν ίσχυε;**". Έτσι ανοίγονται νέα ερευνητικά μονοπάτια. Στο πρόβλημα του ορθογωνίου, η μέθοδος εφαρμόζεται ως εξής:

- Τι θα συνέβαινε αν το σχήμα δεν ήταν ορθογώνιο αλλά παραλληλόγραμμο ή τραπέζιο;
- Τι θα συνέβαινε το P ήταν εξωτερικό σημείο του ορθογωνίου;

Αυτή η προσέγγιση **καλλιεργεί τη μαθηματική φαντασία** και βοηθά τους μαθητές να κατανοήσουν ότι οι νόμοι της Γεωμετρίας δεν είναι μεμονωμένοι κανόνες, αλλά μέρος ενός ευρύτερου συστήματος σχέσεων.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*. Psychology Press.

Αντιστροφή, τρισδιάστατη επέκταση και γενίκευση

Η λύση του προβλήματος δεν αποτελεί το τέρμα, αλλά το εφαλτήριο για τη μαθηματική γενίκευση. Η διερεύνηση συνεχίζεται με την εξέταση παραλλαγών που ανατρέπουν την παραδοσιακή οπτική γωνία, προσφέροντας "μαθηματικές εκπλήξεις".

- **Η χωρική γενίκευση**: Τι θα άλλαζε αν το σημείο P δεν βρισκόταν στο επίπεδο, αλλά στον τρισδιάστατο χώρο; Σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, η σχέση των αποστάσεων γενικεύεται εντυπωσιακά. Αν P είναι σημείο στον χώρο και A, B, Γ, Δ οι κορυφές μιας έδρας (και A΄, B΄, Γ΄, Δ΄ οι αντίστοιχες της απέναντι), η συμμετρία των αποστάσεων διατηρείται, οδηγώντας σε ανάλογες εξισώσεις αθροισμάτων τετραγώνων.
- **Η Στρατηγική της Αντιστροφής:** Αντί να ζητάμε το μήκος PB, θέτουμε το ερώτημα: «Αν δίνονται τέσσερα τμήματα με μήκη 3, 4, 5 και x, για ποιες τιμές του x μπορεί το σημείο P να αποτελεί εσωτερικό σημείο ενός ορθογωνίου;». Η αντιστροφή αυτή μετατοπίζει το ενδιαφέρον από τον υπολογισμό στις συνθήκες ύπαρξης του σχήματος.

Παράδειγμα 7
Στοχαστικός συλλογισμός

Στατιστική: Διαχείριση δεδομένων - Σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών. Πιθανότητες: Συσχέτιση (Β΄ Λυκείου ΓΠ)

Σ.Δ.11.1. Διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν σχέσεις εξάρτησης μεταξύ δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών του πληθυσμού.

Σ.Δ.11.2. Κατασκευάζουν πίνακες συνάφειας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων διπλής εισόδου και ερμηνεύουν τις τελευταίες ως πιθανότητες τομής δύο ενδεχομένων.

Σ.Δ.11.3. Από τον πίνακα συνάφειας συχνοτήτων διπλής εισόδου υπολογίζουν τις περιθώριες συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες.

Σ.Δ.11.4. Υπολογίζουν τις σχετικές συχνότητες για κάθε πιθανή στάθμη ενός κατηγορικού χαρακτηριστικού δεσμεύοντας κάθε φορά ως προς μία στάθμη του άλλου κατηγορικού χαρακτηριστικού και τις ερμηνεύουν ως δεσμευμένες πιθανότητες.

Σ.Δ.11.5. Κατασκευάζουν στοιβαγμένα ραβδογράμματα συχνοτήτων και ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων.

Σ.Ε.11.1. Από δοσμένα στοιβαγμένα ραβδογράμματα συχνοτήτων και ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων εξάγουν συμπεράσματα σχετικά με την εξάρτηση των δύο κατηγορικών μεταβλητών.

Σ.Ε.11.2. Ανακαλύπτουν και εξηγούν με παραδείγματα ότι δύο κατηγορικά χαρακτηριστικά δε διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας αιτιατού.

Π.Σ.11.1. Ορίζουν τη δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου, δεδομένου ενός άλλου.

Πίνακας συνάφειας μεταξύ δύο κατηγορικών χαρακτηριστικών (Β΄ Λυκείου ΓΠ)

Σε ένα Γυμνάσιο πραγματοποιήθηκε έρευνα για τις συνήθειες ανάγνωσης των μαθητών. Συλλέχθηκαν στοιχεία για 400 μαθητές της Α' και Β' Γυμνασίου. Τα είδη βιβλίων *που διάβασαν οι μαθητές ήταν*: Μυθιστόρημα (Μ), Επιστημονική Φαντασία (ΕΦ), Ιστορικό (Ι) και Βιογραφίες (Β).
Οι παρατηρήσεις καταγράφηκαν στον παρακάτω πίνακα συνάφειας:

Επίπεδο / Είδος	Μ	ΕΦ	Ι	Β	Σύνολο Γραμμής
Α' Γυμνασίου	80	40	30	50	200
Β' Γυμνασίου	40	70	60	30	200
Σύνολο Στήλης	120	110	90	80	400

α) Να δημιουργήσετε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων (ως προς το συνολικό δείγμα). Να ερμηνεύσετε την τιμή της θέσης (ΑΓ, Μ) ως πιθανότητα.
β) Να υπολογίσετε τις περιθώριες σχετικές συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες για κάθε είδος βιβλίου δεσμευμένες ως προς την τάξη: Ποια είναι η κατανομή των επιλογών μεταξύ των μαθητών της Α' και της Β΄ Γυμνασίου;

γ) Να κατασκευάσετε: **i)** Ένα στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων όπου κάθε ράβδος αντιστοιχεί σε είδος βιβλίου και χωρίζεται σε τμήματα για ΑΓ και ΒΓ. **ii)** Ένα ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων που να παρουσιάζει τις δεσμευμένες κατανομές (από το ερώτημα β) για κάθε τάξη ξεχωριστά.

δ) Να αναλύσετε και απαντήσετε: **i)** Συγκρίνοντας τα μήκη των ράβδων στα διαγράμματά σου, υπάρχει ένδειξη εξάρτησης μεταξύ της τάξης και του είδους του επιλεγμένου βιβλίου; Να αιτιολογήσεις πλήρως. **ii)** Αν διαπιστώσεις εξάρτηση, μπορείς να ισχυριστείς ότι η τάξη προκαλεί τη διαφορά στις προτιμήσεις; Ποιοι κρυφοί παράγοντες (π.χ., ωριμότητα, προγράμματα σπουδών, επιρροή συνομηλίκων) θα μπορούσαν να εξηγήσουν τη συσχέτιση χωρίς απαραίτητα να είναι αιτιώδης ο σύνδεσμος.

Πίνακες συνάφειας και στατιστική σκέψη

Μαθησιακοί στόχοι και ανάλυση δεδομένων

- **Μετάβαση από τη συχνότητα στην πιθανότητα:** Κατανόηση της σχετικής συχνότητας ως πιθανότητα επιλογής. Για παράδειγμα, η τιμή 0,20 (20%) για το (ΑΓ, Μ) αντιπροσωπεύει τη σύνθετη πιθανότητα $P(A \cap B)$.
- **Περιθώριες vs Δεσμευμένες κατανομές:** Διάκριση μεταξύ της γενικής τάσης του δείγματος και της συμπεριφοράς συγκεκριμένων υποομάδων (π.χ. "Ποιες είναι οι προτιμήσεις *δεδομένου* ότι ο μαθητής ανήκει στη Β΄ Γυμνασίου;").

Οπτικοποίηση και συγκριτική ανάλυση

- **Στοιβαγμένο ραβδόγραμμα:** Χρήσιμο για την ανάδειξη της συμβολής κάθε τάξης στο συνολικό πλήθος ανά είδος βιβλίου.
- **Ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα:** Το ιδανικό εργαλείο για τη σύγκριση των δεσμευμένων κατανομών. Η οπτική ανισότητα στα μήκη των ράβδων αποτελεί την πρώτη "απόδειξη" στατιστικής εξάρτησης.

Κριτική σκέψη: Συσχέτιση vs αιτιότητα Η διαφορά στις δεσμευμένες κατανομές υποδεικνύει στατιστική εξάρτηση, χωρίς όμως η τάξη να «προκαλεί» αναγκαστικά την αλλαγή προτίμησης. Οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν λανθάνοντες παράγοντες, όπως η ωριμότητα ή το πρόγραμμα σπουδών, διακρίνοντας τη στατιστική συσχέτιση από την ουσιαστική αιτιότητα.

Παράδειγμα 8
Στοχαστική μοντελοποίηση

Εισαγωγή στη δεσμευμένη πιθανότητα (Γ΄ Λυκείου)

ΠΜΑ (Γ΄ ΓΠ και Προσανατολισμού ΘΣ) -Συσχέτιση

Π.Σ.12.1./ Π.Σ.12.Π.1. Χρησιμοποιούν τον πολλαπλασιαστικό κανόνα για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Π.Σ.12.2./ Π.Σ.12.Π.2. Αξιοποιούν τη δεσμευμένη πιθανότητα για να ορίσουν την ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων.

Π.Σ.12.3./ Π.Σ.12.Π.3. Εφαρμόζουν το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Π.Σ.12.4. /Π.Σ.12.Π.4. Εφαρμόζουν το Θεώρημα του Bayes στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Εισαγωγή στη δεσμευμένη πιθανότητα (Γ΄ Λυκείου)

Πρόβλημα: Το τμήμα ποιότητας

Μια εταιρεία παράγει εξαρτήματα σε δύο μηχανήματα: Το Μ1 παράγει το ***60%*** *της παραγωγής και το Μ2 το* ***40%****. Τα ποσοστά ελαττωματικών εξαρτημάτων είναι* ***3%*** *για το Μ1 και* ***5%*** *για το Μ2.*

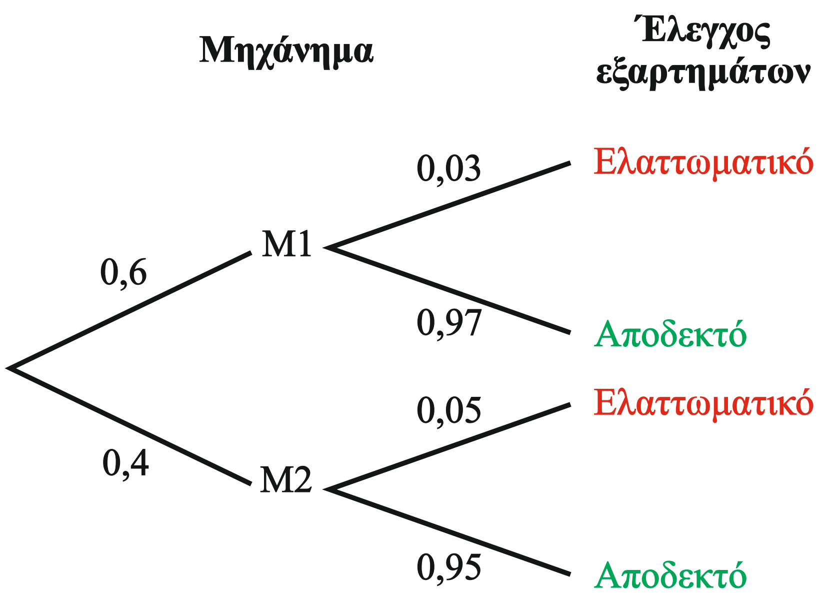
α) *Αν πάρουμε τυχαία ένα εξάρτημα, ποια η πιθανότητα να είναι ελαττωματικό;*

β) *Ένα εξάρτημα επιλέγεται τυχαία και βρίσκεται ελαττωματικό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει παραχθεί στο Μ1;*

Εισαγωγή στη δεσμευμένη πιθανότητα (Γ΄ Λυκείου)

Λύση του προβλήματος

Το δεντροδιάγραμμα συνιστά μια εύκολη μέθοδο καταγραφής των εξαγομένων ενός πειράματος τύχης και εύρεσης των αντίστοιχων πιθανοτήτων.



α) Ολική πιθανότητα ελαττωματικού:

$$P(E) = P(M1 \text{ και } E) + P(M1 \text{ και } E)$$
$$= 0,6 \cdot 0,03 + 0,4 \cdot 0,05 = 0,018 + 0,02 = \mathbf{0,038}$$

β) Δεσμευμένη πιθανότητα

Ο τύπος προκύπτει από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας:

$$P(M1/E) = \frac{P(M1 \text{ και } E)}{\Pi(E)}$$

Άρα, P(M1|E) = 0.018 / 0.038 = 18/38 ≈ **0.4737**.
Η πιθανότητα, δεδομένου ότι είναι ελαττωματικό, να προήλθε από το "καλύτερο" μηχάνημα M1 είναι μόνο ~47.4%, παρόλο που το M1 παράγει το 60% της παραγωγής.

Εισαγωγή στη δεσμευμένη πιθανότητα και το δεντροδιάγραμμα

Το πρόβλημα της παραγωγής εξαρτημάτων από δύο μηχανές (Μ1 και Μ2) αποτελεί την ιδανική εισαγωγή στην έννοια της **δεσμευμένης πιθανότητας**. Η χρήση του διαγράμματος δέντρου επιτρέπει στους μαθητές να οπτικοποιήσουν τη δομή των σύνθετων ενδεχομένων και να κατανοήσουν τη διαδοχική φύση των πιθανοτήτων.

- **Ολική πιθανότητα**: Το ερώτημα (α) απαιτεί τον υπολογισμό της πιθανότητας ένα τυχαίο εξάρτημα να είναι ελαττωματικό, P(E). Εδώ εφαρμόζεται ο **Νόμος της Ολικής Πιθανότητας**, αθροίζοντας τις επιμέρους πιθανότητες εμφάνισης ελαττωματικού από κάθε μηχανή: **$P(E) = P(M1 \cap E) + P(M2 \cap E) = 0{,}038$.**
- **Η διδακτική αντίθεση**: Το πρόβλημα αναδεικνύει τη διαφορά μεταξύ της «αρχικής» πληροφορίας (το 60% της παραγωγής προέρχεται από το μηχάνημα Μ1) και της «νέας» πληροφορίας (το εξάρτημα είναι ελαττωματικό), **η οποία ανατρέπει τη διαισθητική προσέγγιση των μαθητών.**

Το Θεώρημα Bayes και η αναθεώρηση πεποιθήσεων

Το ερώτημα (β) εισάγει τους μαθητές στη λογική του **Θεωρήματος Bayes**, ζητώντας την πιθανότητα P(M1|E). Η διαδικασία αυτή ουσιαστικά «αναστρέφει» την πληροφορία, υπολογίζοντας την πιθανότητα της αιτίας (Μηχανή) δεδομένου του αποτελέσματος (Ελαττωματικό).

- **Μαθηματική εφαρμογή**: Χρησιμοποιώντας τον τύπο **$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$,** προκύπτει ότι $P(M1|E) = 0{,}018 / 0{,}038 \approx$ **0,4737**. Το αποτέλεσμα αυτό εκπλήσσει, καθώς δείχνει ότι παρόλο που η M1 παράγει τον μεγαλύτερο όγκο, ένα ελαττωματικό εξάρτημα είναι πιθανότερο (πάνω από 50%) να προέρχεται από τη M2.
- **Πρακτική ερμηνεία**: Η πληροφορία «είναι ελαττωματικό» **μειώνει τον δειγματικό χώρο**, εστιάζοντας μόνο στο σύνολο των ελαττωματικών. Το M2 παράγει **5% ελαττωματικά** ενώ το M1 μόνο **3%**, οπότε ανά μονάδα παραγωγής, το M2 ευθύνεται για περισσότερα ελαττωματικά, και αυτό αλλάζει τα ποσοστά μόλις ξέρουμε ότι το εξάρτημα είναι ελαττωματικό.
- Αυτό το παράδειγμα ανοίγει τον δρόμο για την κατανόηση της **αναθεώρησης πεποιθήσεων** με βάση νέα στοιχεία, μια δεξιότητα κρίσιμη σε πεδία όπως οι **ιατρικές διαγνώσεις** και η επιστήμη δεδομένων.

Παράδειγμα 9
Πολλαπλή ερμηνεία, δημιουργία συνδέσεων, και βαθιά κατανόηση

Η έννοια της παραγώγου (Γ΄ Λυκείου, ΓΠ, ΠΘΣ)

ΠΜΑ (Γ΄ Λυκείου ΓΠ) –Διαφόριση

Αν.Δ.12.1. Χρησιμοποιούν το λόγο μεταβολής για να ορίσουν τη μέση και τη στιγμιαία ταχύτητα σε συγκεκριμένα προβλήματα και να προσεγγίσουν διαισθητικά την έννοια της παραγώγου.

Αν.Δ.12.2. Συνδέουν την έννοια της παραγώγου με την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Αν.Δ.12.3. Χρησιμοποιούν τους κανόνες παραγώγισης αθροίσματος και γινομένου στην εύρεση παραγώγων πολυωνυμικών συναρτήσεων.

Αν.Δ.12.4. Αναγνωρίζουν ότι η παράγωγος εκφράζει το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους ως προς ένα άλλο.

Αν.Δ.12.5. Αξιοποιούν το ρυθμό μεταβολής στη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων και στην επίλυση προβλημάτων.

ΠΜΑ (Γ΄ Λυκείου ΠΘΣ) –Διαφόριση

Αν.Δ.12.Π.1. Μέσω προβλημάτων μοντελοποίησης ορίζουν την έννοια της παραγώγου σε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Αν.Δ.12.Π.2. Αναγνωρίζουν την ύπαρξη ή μη της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο από τη γραφική της παράσταση.

Αν.Δ.12.Π.3. Συνδέουν την έννοια της παραγώγου με την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης συνάρτησης.

Πολλαπλοί τρόποι κατανόησης της παραγώγου

Thurston, W. P.: 1994, On Proof and Progress in Mathematics, *Bull. AMS*. 30, 161–77.

Η έννοια της παραγώγου είναι πολύπλευρη και μπορεί να γίνει κατανοητή μέσα από διαφορετικές «οπτικές», οι οποίες μας βοηθούν να δούμε το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο από πολλές πλευρές. Αυτό το πλούσιο πλέγμα ερμηνειών ενισχύει τη βαθιά κατανόηση και την ευελιξία στη χρήση της.

- **Δυναμική / Φυσική:** Η στιγμιαία ταχύτητα μεταβολής.
- **Γεωμετρική:** Η κλίση της εφαπτομένης ευθείας.
- **Αλγεβρική / Συμβολική:** Ένας κανόνας υπολογισμού (π.χ. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.(
- **Αναλυτική:** Ένα όριο που εκφράζει ακριβή προσέγγιση (ορισμός με ε και δ).
- **Προσεγγιστική:** Η καλύτερη γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης κοντά σε ένα σημείο.
- **Δομική:** Η ευαισθησία της εξόδου μιας συνάρτησης σε μικρές αλλαγές της εισόδου της.

Η ισχύς της παραγώγου έγκειται ακριβώς στην ισοδυναμία όλων αυτών των ερμηνειών, επιτρέποντας σε κάθε πρόβλημα να προσεγγιστεί από την πιο αποτελεσματική σκοπιά.

3

Συμπεράσματα και προβληματισμοί

Ο επαναπροσδιορισμός της μαθηματικής εκπαίδευσης

Στη μετάβαση από τη στείρα μετάδοση γνώσης στην ενεργητική μαθηματική δραστηριότητα, το επίκεντρο μετατοπίζεται από το «τι» στο «πώς» μαθαίνουμε.

- **Στόχος των νέων ΠΣ:** Καλλιέργεια Προσδοκώμενων Μαθησιακών Αποτελεσμάτων (ΠΜΑ).
- **Πυλώνες ικανοτήτων:** Συλλογισμός, επίλυση προβλήματος, μοντελοποίηση και επικοινωνία.
- **Η γνώση ως εργαλείο:** Μέσο κατανόησης του κόσμου και ανάπτυξης της κριτικής σκέψης.
- **Ο μαθητής:** Πρωταγωνιστής σε μια διαδικασία αυτενέργειας και ανακάλυψης.

Ερωτήματα προς συζήτηση: α) Ποιος είναι σήμερα ο πραγματικός σκοπός της μαθηματικής διδασκαλίας; **β)** Πώς επαναπροσδιορίζεται η έννοια της «επιτυχίας» μέσα από τα ΠΜΑ; **γ)** Πώς συνδέονται τα μαθηματικά με την καθημερινή εμπειρία των μαθητών;

Ο εκπαιδευτικός και οι προκλήσεις της εφαρμογής

Ο εκπαιδευτικός μετατρέπεται από απλό μεταδότη σε δημιουργό και συντονιστή πλούσιων μαθησιακών εμπειριών, αντιμετωπίζοντας παράλληλα τις δομικές δυσκολίες του συστήματος.

- **Ο ρόλος του εκπαιδευτικού:** Σχεδιαστής έργων που προάγουν τη διερεύνηση και τον αναστοχασμό.
- **Εργαλεία διδασκαλίας:** Αξιοποίηση των Οδηγών Εκπαιδευτικού για τη διαχείριση καινοτόμων έργων.
- **Πραγματικά εμπόδια:** Πίεση της ύλης, εξετασιοκεντρικό σύστημα και ανάγκη για ουσιαστική επιμόρφωση.
- **Το διακύβευμα:** Ο εκπαιδευτικός ως φορέας μετασχηματισμού της σχολικής πραγματικότητας.

Ερωτήματα προς συζήτηση: α) Πώς εφαρμόζονται οι καινοτομίες των ΠΣ υπό την πίεση του χρόνου και των εξετάσεων; **β)** Ποια είναι τα όρια και οι δυνατότητες παρέμβασης στο υπάρχον σχολικό πλαίσιο; **γ)** Πώς μπορεί ο εκπαιδευτικός να εμπνεύσει μια βαθιά αλλαγή στη διδακτική πράξη;

Συμπεράσματα

Η αναβάθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν εξαρτάται από μια απλή περικοπή της ύλης, αλλά από τον επαναπροσδιορισμό της σχέσης ανάμεσα στον διδακτικό χρόνο και τη γνωστική εμβάθυνση. Τα συμπεράσματα συνοψίζονται στα εξής:

- **Η χρονική ασυμβατότητα:** Παρά τις διεθνείς συγκρίσεις, η ελληνική διδακτέα ύλη παραμένει δυσανάλογη προς τον πραγματικό χρόνο, περιορίζοντας τη δυνατότητα για ουσιαστική οικοδόμηση της γνώσης.
- **Το έλλειμμα διερεύνησης:** Οι καινοτόμες προσεγγίσεις απαιτούν "χώρο" για πειραματισμό, ο οποίος συχνά θυσιάζεται στον βωμό της κάλυψης του ωρολογίου προγράμματος.
- **Η πρόκληση της μετάβασης:** Τα νέα προγράμματα σπουδών αποτελούν απλώς τον σκελετό· η "σάρκα" τους είναι η παιδαγωγική επεξεργασία και η συνεχής επιμόρφωση που μετατρέπει τη θεωρία σε πράξη.
- **Ο ρόλος του εκπαιδευτικού:** Ο εκπαιδευτικός δεν είναι απλός διεκπεραιωτής, αλλά ο στρατηγικός διαμεσολαβητής που καλείται να ισορροπήσει ανάμεσα στις απαιτήσεις των εξετάσεων και την καλλιέργεια της αυθεντικής μαθηματικής σκέψης.
- **Ο ψηφιακός αναχρονισμός:** Η προσμονή του πολλαπλού βιβλίου, που ακόμη εκκρεμεί, κινδυνεύει

Εν κατακλείδι

Σε τελική ανάλυση, η εφαρμογή των νέων προγραμμάτων σπουδών δεν είναι ένας δρόμος ταχείας κυκλοφορίας, **αλλά μια χαρτογράφηση σε αχαρτογράφητα νερά.** Όσο όμως εμείς αναμένουμε το "πολλαπλό βιβλίο" ως θεσμικό σωσίβιο, η ραγδαία επέλαση της τεχνητής νοημοσύνης απειλεί να μετατρέψει το έντυπο μέσο σε έκθεμα μουσείου πριν ακόμη φτάσει στα θρανία. **Η πρόκληση είναι η απαγκίστρωση από την κουλτούρα του βιβλία και η εστίαση στο ΠΣ**, την ώρα που ο κόσμος γύρω μας τρέχει με αλγοριθμική ταχύτητα.

Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας!