



Πανελλήνια Παιδαγωγική Εταιρεία Δευτεροβάθμιας
Εκπαίδευσης

ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΗ ΗΜΕΡΙΔΑ

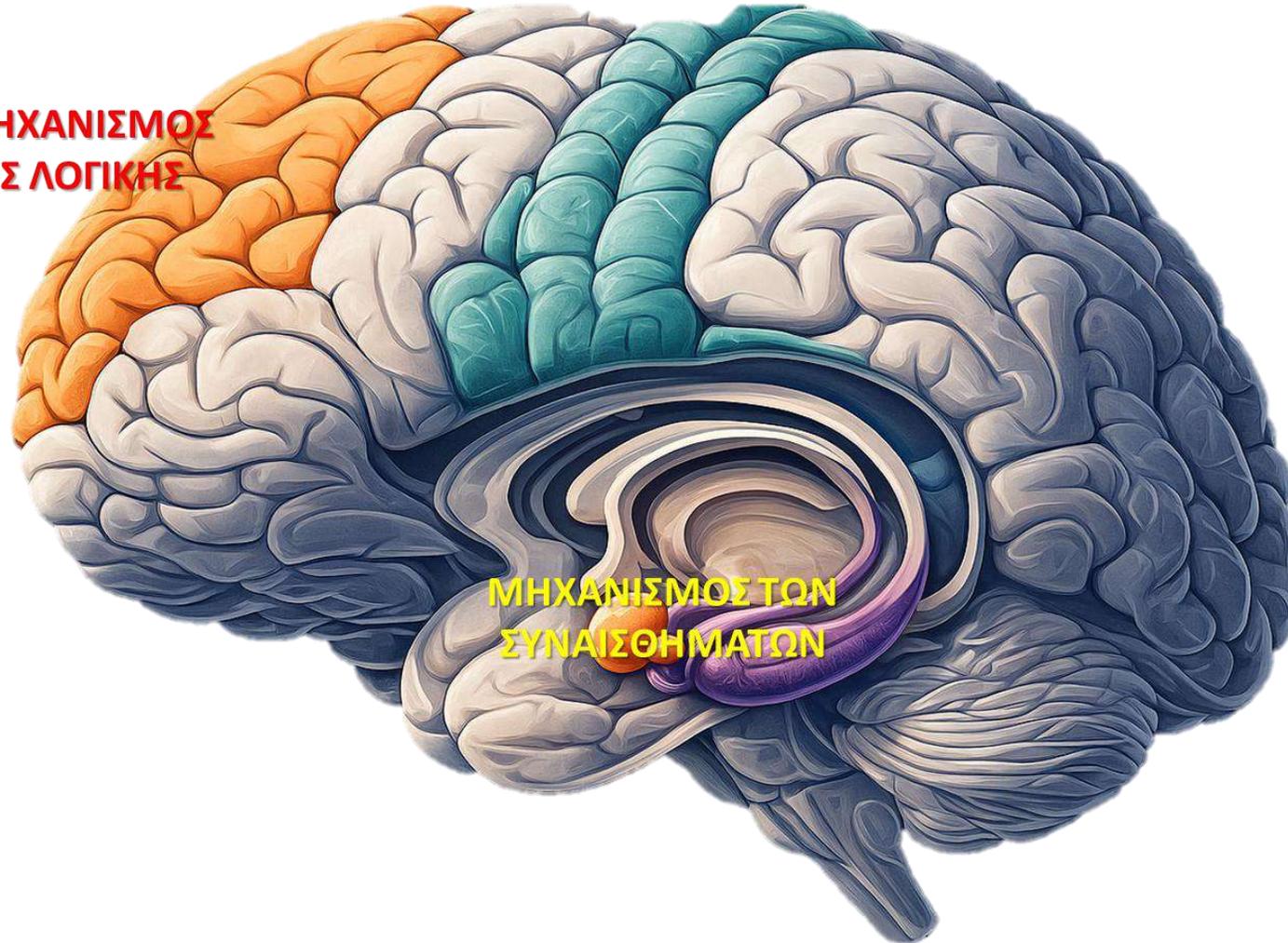
*Ο εκπαιδευτικός ως “δημιουργός”
γνώσης στην εποχή της Τεχνητής
Νοημοσύνης*

*Δρ. Άρης Μαυρομάτης
Μαθηματικός-Θεωρητικός Τέχνης-
Ανάπτυξη Τεχνολογίας Υπερμέσων
Ερευνητής - Καθηγητής
Κέντρο Δια Βίου Μάθησης
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας*

Η συγκρότηση του νοητικού μας χάρτη

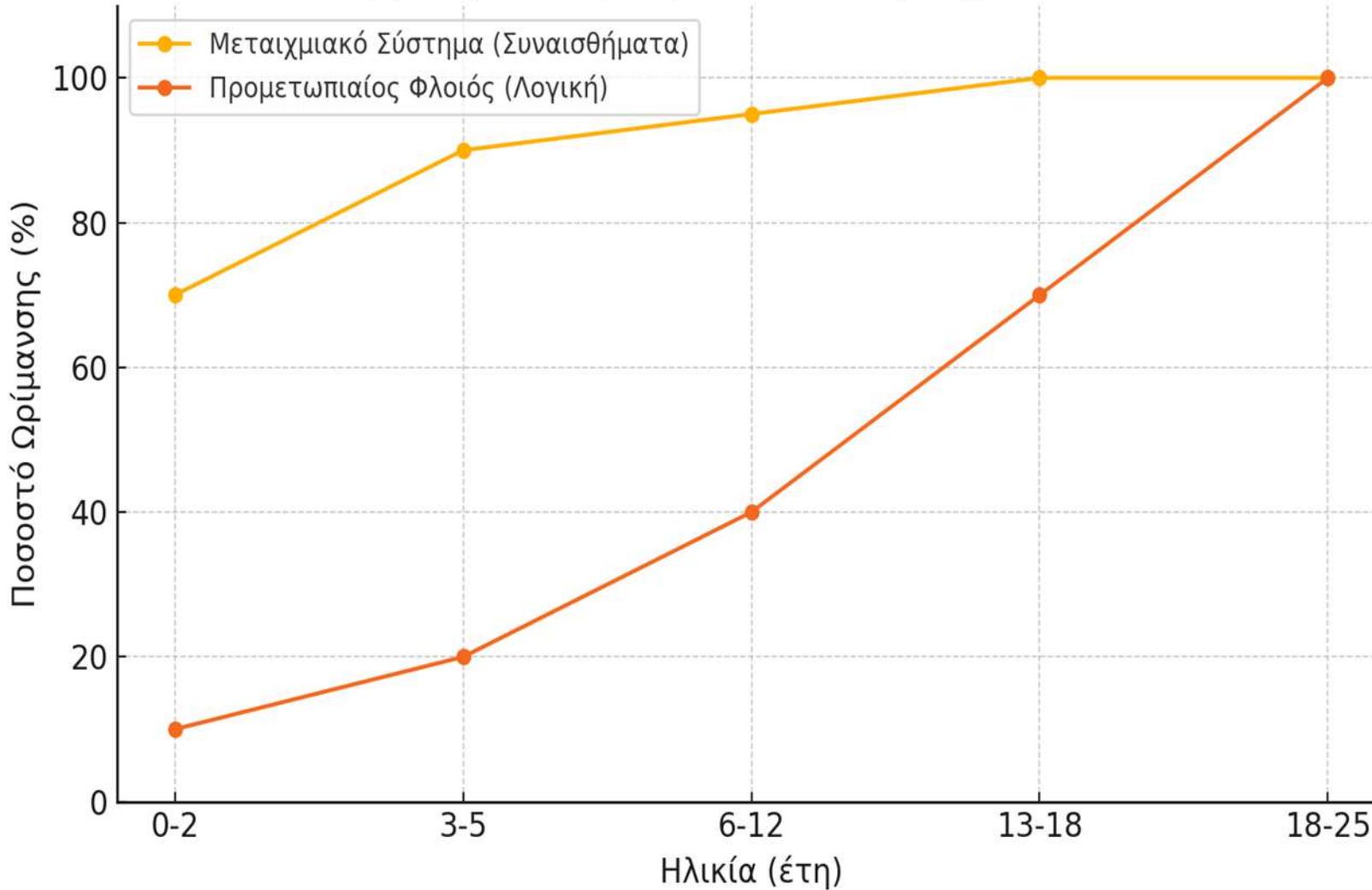
ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ
ΑΙΣΘΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ
ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ



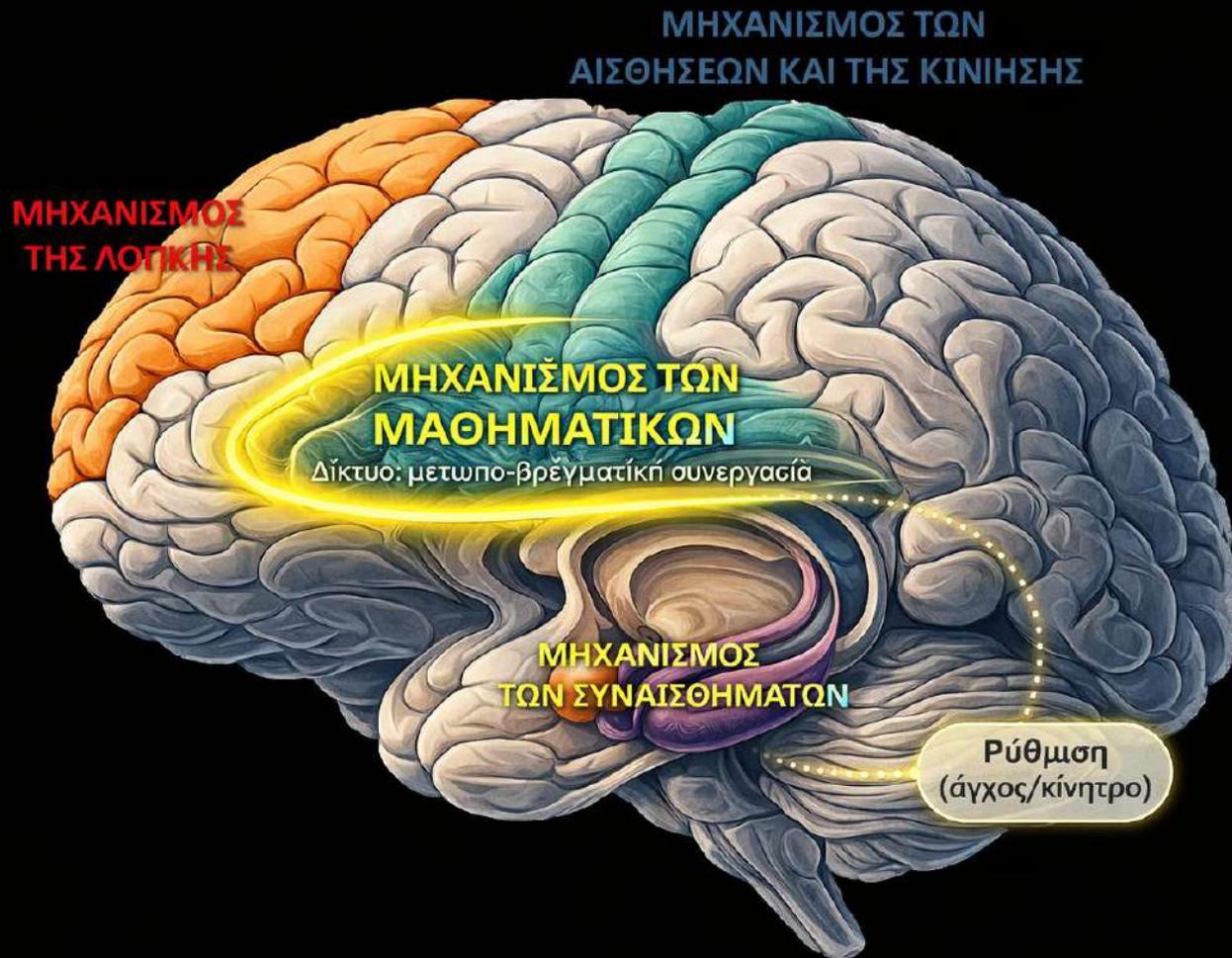
ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ
ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΩΝ

Ανάπτυξη Κύριων Εγκεφαλικών Περιοχών Κατά Ηλικία



Πηγή: Εκπαιδευτικό διάγραμμα βασισμένο σε ευρήματα της αναπτυξιακής Νευροεπιστήμης (π.χ. Giedd et al., 1999· Blakemore & Choudhury, 2006).

Μαθηματικά και Εγκέφαλος



«Η Μαθηματική σκέψη υποστηρίζεται από **κατανεμημένα δίκτυα**, με κεντρική τη **μέτωπο-βρεγματική συνεργασία** (**στρατηγικός/εκτελεστικός έλεγχος + αναπαραστάσεις ποσότητας/χώρου**).

Ο βρεγματικός φλοιός (ιδίως η **ενδοβρεγματική αύλακα**) εμπλέκεται συστηματικά σε **επεξεργασία αριθμού/ποσότητας**.

Τα συναισθήματα δεν αποτελούν “κέντρο” μαθηματικών, αλλά **ρυθμίζουν την απόδοση**, το Μαθηματικό άγχος (Math anxiety) συνδέεται με ενεργοποίηση δικτύων **απειλής/πόνου στην προσμονή μαθηματικού έργου**. »

Το Βιολογικό Πρότυπο



Μαθηματικά και AI

Η **Τεχνητή Νοημοσύνη** που βλέπουμε σήμερα βασίζεται κυρίως στο **deep learning**. Και το deep learning, αν το ξεγυμνώσεις από τη “λάμψη” της τεχνολογίας, είναι καθαρά **Μαθηματικά**:

Είναι μια συνάρτηση με πολλές παραμέτρους που παίρνει είσοδο και βγάζει έξοδο.

Η “μάθηση” δεν είναι μαγεία: είναι το να διαλέξεις τις **παραμέτρους** ώστε να **ελαχιστοποιήσεις** ένα σφάλμα.

Αυτό γίνεται με **βελτιστοποίηση**: ορίζουμε μια συνάρτηση κόστους και τη μειώνουμε με **παραγώγους** και τον **κανόνα αλυσίδας**.

Και το “υλικό” που δουλεύει από κάτω είναι **γραμμική άλγεβρα** (πίνακες/διανύσματα), **ανάλυση** (παράγωγοι) και **πιθανότητες/στατιστική** (αβεβαιότητα, γενίκευση).

Άρα, όταν μιλάμε για ΤΝ, μιλάμε για μια σύγχρονη εφαρμογή των σχολικών και πανεπιστημιακών μαθηματικών.

Ο ΠΥΡΗΝΑΣ ΤΟΥ DEEP LEARNING ΕΙΝΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΝΕΥΡΩΝΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ =
ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$y = f(W_3 \cdot f(W_{11} x + b_1)) + b_3 + e_2$$

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ =
ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Για ελαχιστοποίηση:

- Gradient Descent
 $\nabla j(\theta_{\dots}) = \frac{\partial j}{\partial \theta_1}, \frac{\partial j}{\partial \theta_2}, \dots$
- Chain Rule
Backpropagation
- Cost Function = $J_{\text{ολόκληρο}} = \sum_{i=1}^n e_i^2$

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΣ: ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ + ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ + ΠΙΝΑΚΕΣ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} f(x)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$j(\theta_{\dots}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_i^2$$

$$y^* = E[Y|X=x] = \sum_{j=1}^n p_j y_j$$

Η Δημιουργικότητα ως "Μαθηματική Ικανότητα"

Στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών, η δημιουργικότητα δεν είναι απλώς μια "μέθοδος", αλλά μαθησιακός στόχος.

- **"Ο ρόλος του εκπαιδευτικού μετατοπίζεται από την αυθεντία που κατέχει τη γνώση και την αποκαλύπτει στους μαθητές, στον σχεδιαστή περιβαλλόντων μάθησης και τον διευκολυντή της διαδικασίας οικοδόμησης της γνώσης."**
- **"Επιδιώκεται η ενθάρρυνση των μαθητών για την παραγωγή πρωτότυπων ιδεών, την αναζήτηση εναλλακτικών μεθόδων επίλυσης και την ανάπτυξη της μαθηματικής περιέργειας."**
- **"Οι εργασίες μικρής ή μεγάλης διάρκειας (projects) αποσκοπούν στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να ερευνούν, να συλλέγουν δεδομένα, να μοντελοποιούν καταστάσεις και να ανακοινώνουν τα αποτελέσματά τους χρησιμοποιώντας μαθηματική ορολογία."**

1. Στο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Γυμνασίου

- Πηγή: [ΦΕΚ 5260/Β/12-11-2021](#) (Αριθμ. 141379/Δ2)
- Ενότητα: Α. Φυσιογνωμία του μαθήματος / 3. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού.
- Σελίδα: 60309 (του ΦΕΚ).
- Παράγραφος: Είναι η 1η παράγραφος της ενότητας για τον ρόλο του εκπαιδευτικού.

2. Στο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Λυκείου

- Πηγή: [ΦΕΚ 5390/Β/19-11-2021](#) (Αριθμ. 145377/Δ2)
- Ενότητα: Α. Φυσιογνωμία του μαθήματος / 3. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού.
- Σελίδα: 62235 (του ΦΕΚ).

Εισαγωγή & Φιλοσοφικό Υπόβαθρο

Η παρούσα δραστηριότητα γεφυρώνει τη **διαισθητική κατανόηση** με τη **μαθηματική αυστηρότητα**, ακολουθώντας τη ρήση του Henri Poincaré:

«Είναι με τη λογική που αποδεικνύουμε, αλλά με τη διαίσθηση που επινοούμε. Για να οικοδομήσουμε ένα οικοδόμημα, δεν αρκεί να έχουμε τα τούβλα (τη λογική), πρέπει να έχουμε και το σχέδιο (τη διαίσθηση).»

Poincaré, Science et Méthode, 1908

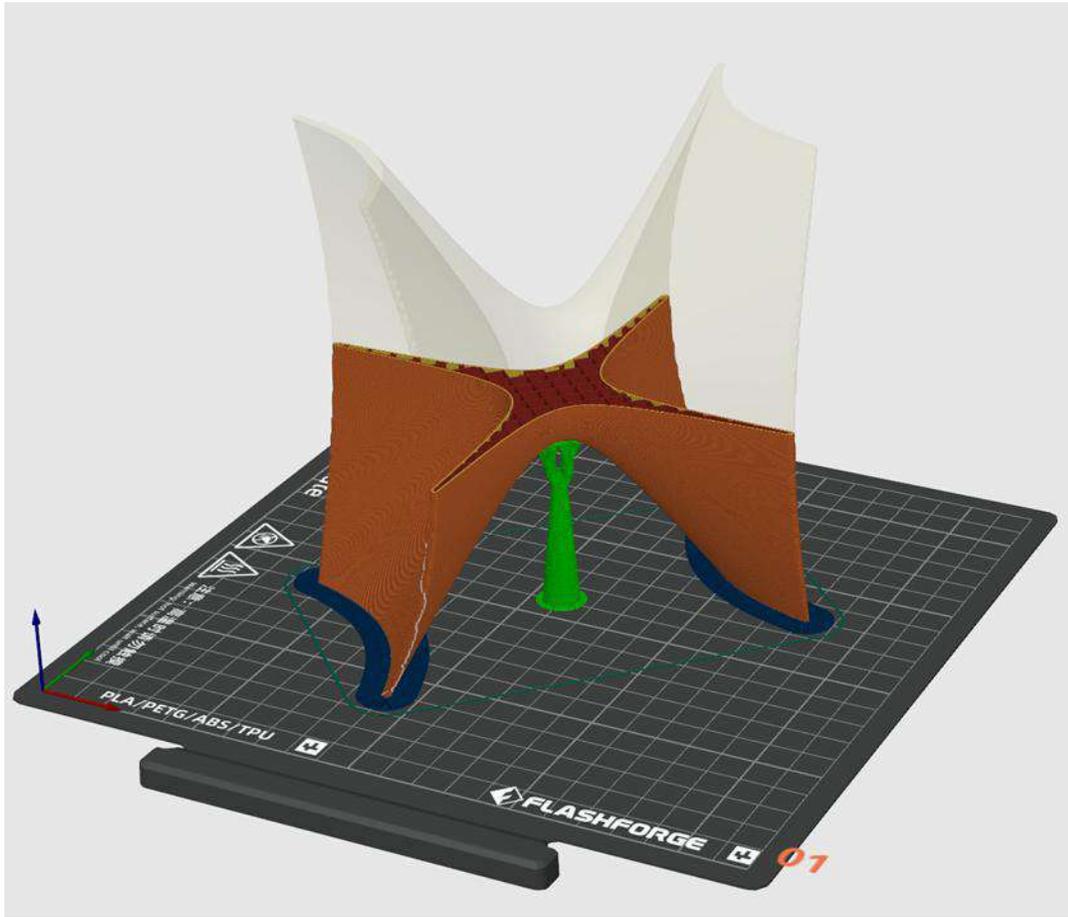
Ερευνητικό Σενάριο Μαθηματικής Διερεύνησης



Ερευνητικό ερώτημα:

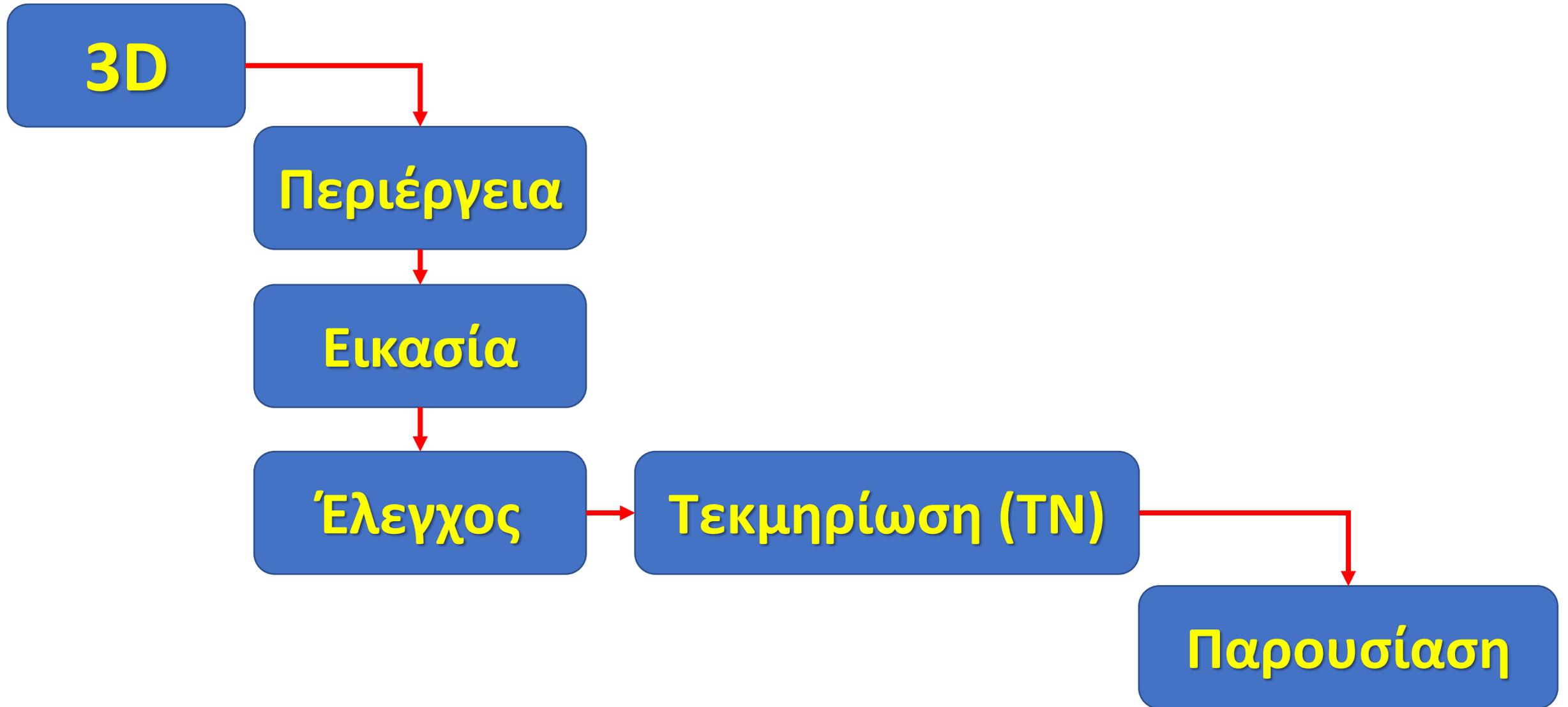
«Διερευνήστε αν υπάρχει σχέση μεταξύ του εικονιζόμενου 3D εκτυπωμένου αντικείμενου και του τριώνυμο 2ου βαθμού ax^2+bx+c »

Σκοπός και Μαθησιακοί Στόχοι



- **Βίωση Έρευνας:** Οι μαθητές συμμετέχουν σε μια αυθεντική **διαδικασία μαθηματικής διερεύνησης** ξεκινώντας από ένα απτό 3D αντικείμενο.
- **Γεωμετρική Περιγραφή:** **Περιγραφή αντικειμένου** με βάση συμμετρίες και τη διάκριση «μέσα-έξω-πάνω».
- **Αλγεβρική Σύνδεση:** Σύνδεση της διακρίνουσας $D = b^2 - 4ac$ με το πλήθος των πραγματικών ριζών.
- **Ψηφιακός Γραμματισμός:** Χρήση της **Τεχνητής Νοημοσύνης (TN)** ως συνεργάτη τεκμηρίωσης και όχι ως μηχανή έτοιμων απαντήσεων.

Διαδικασία Ανάπτυξης της Εφαρμογής



1. Παρατήρηση και περιγραφή του 3D αντικειμένου



- Περιγραφή “το χέρι διερευνά”
- Συμμετρίες, άξονες/επίπεδα συμμετρίας.
- Πρόταση για Σημείο αναφοράς (Origin Point) και άξονες.

ΜΟΡΦΗ – ΝΟΗΜΑ – ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ

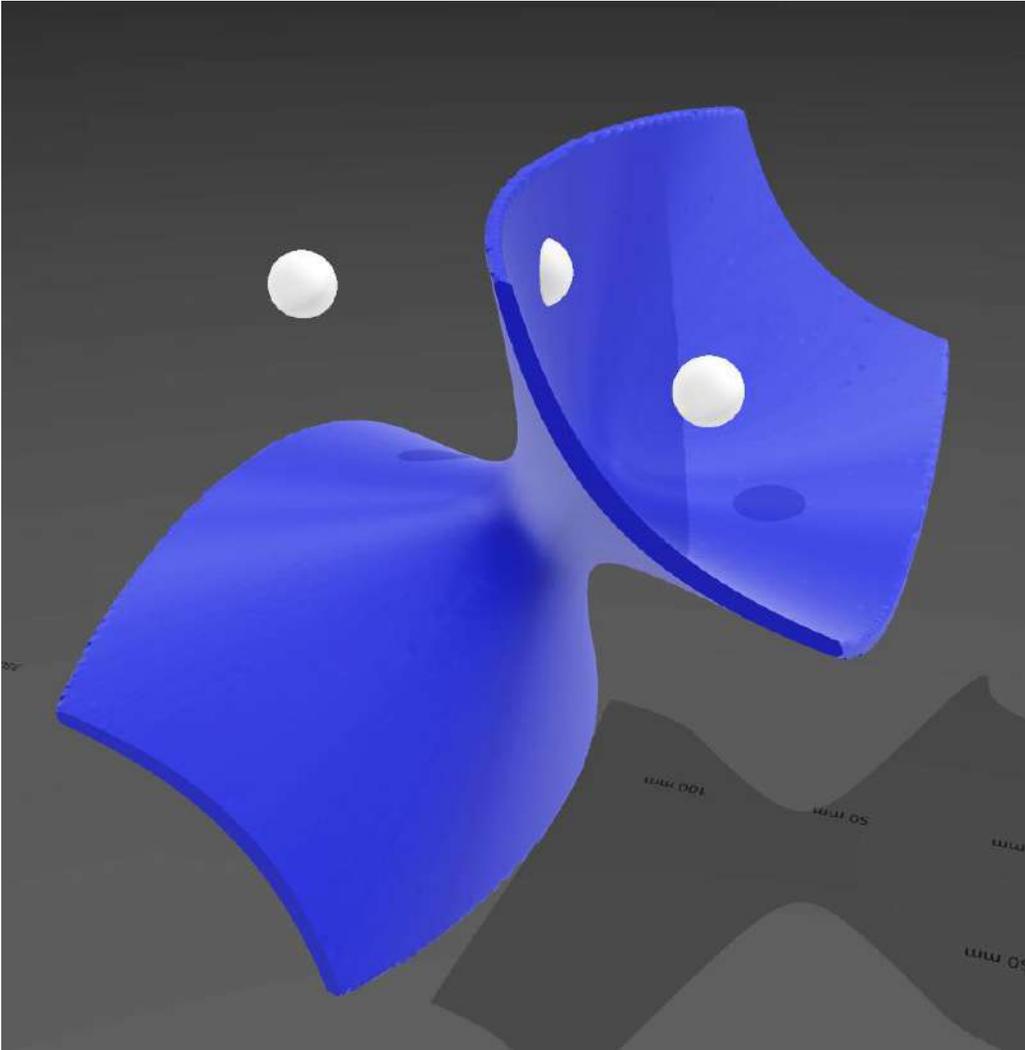
Η φυσική, προ-συμβολική εισαγωγή στη μαθηματική σκέψη

- 1.Υφή
- 2.Κανονικότητες / συμμετρίες (ευθείες, επίπεδα)
- 3.Χαρακτηριστικό σημείο (κάτι που ξεχωρίζει)
- 4.Διαφορετική καμπυλότητα (κυρτό–κοίλο–επίπεδο)
- 5.Ποιότητα υλικού
- 6.Πιθανή αξία χρήσης

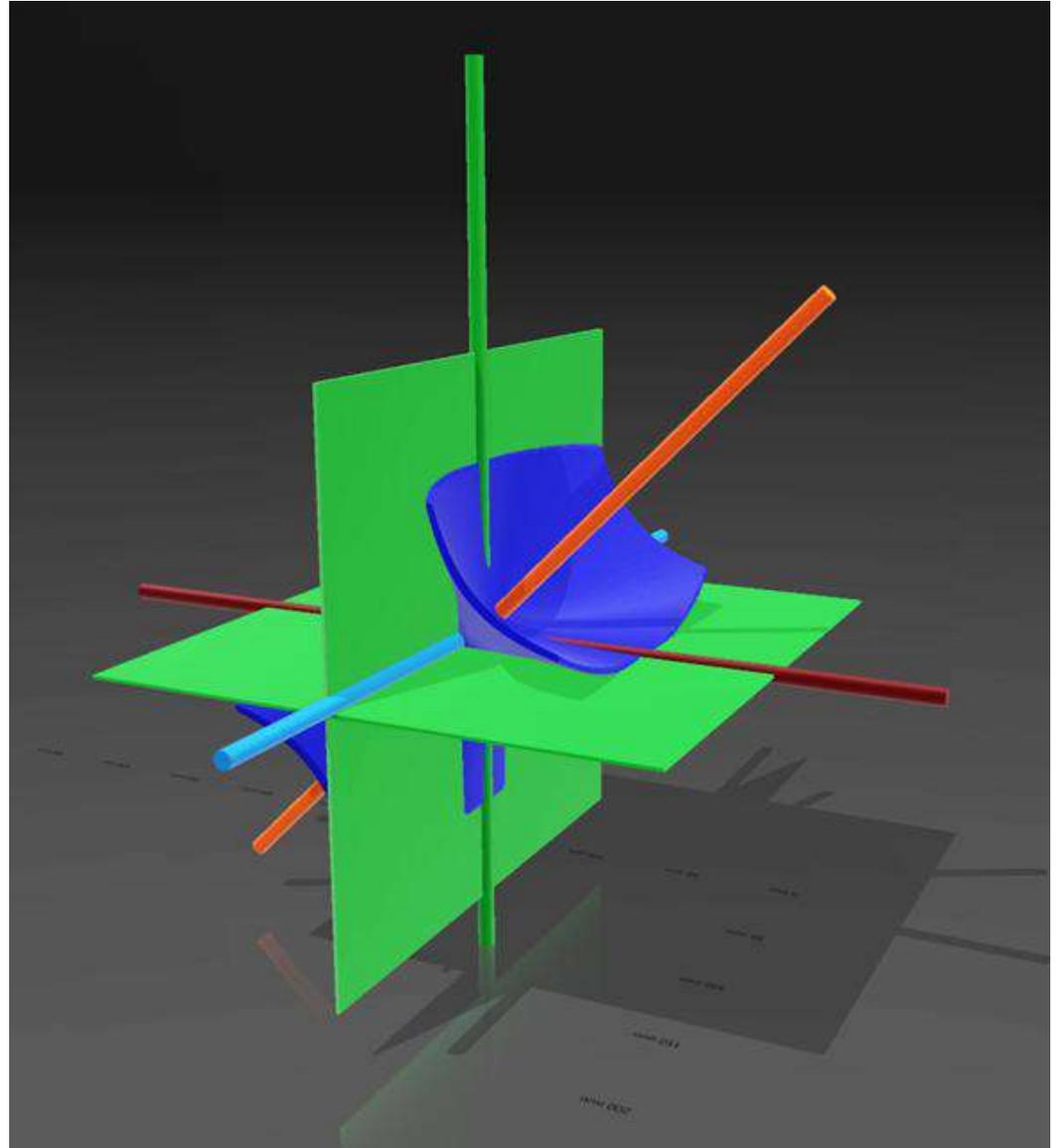
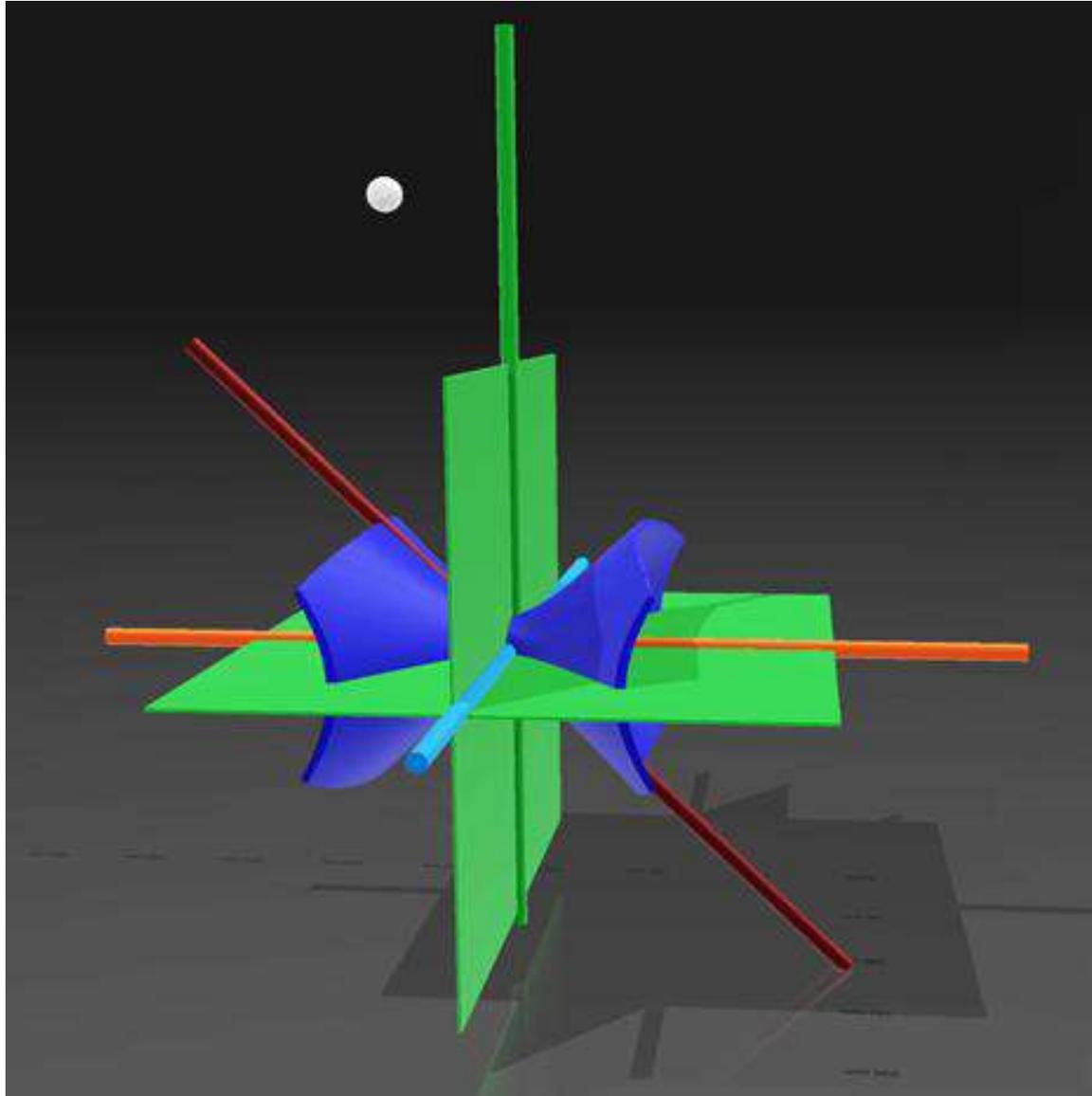
Είναι ακριβώς η σειρά: από το πιο άμεσο αισθητηριακό προς το πιο αφηρημένο και λειτουργικό. Ο εγκέφαλος δεν ξεκινά από τον τύπο. Ξεκινά από τη μορφή.

- (1) Υφή → είναι επιφάνεια ή σώμα; (ΜΑΘ.: σύνορο ή περιοχή)
- (2) Συμμετρίες → τι μένει ίδιο αν το γυρίσω; (ΜΑΘ.: ποια μεγέθη δεν αλλάζουν)
- (3) Χαρακτηριστικό σημείο → πού “σπάει” η ομοιομορφία; (ΜΑΘ.: διπλή ρίζα, οριακή κατάσταση, ιδιομορφία)
- (4) Καμπυλότητα → πού κυρτώνει, πού γίνεται κοίλο; (ΜΑΘ.: διαμερισμός χώρου σε περιοχές διαφορετικής συμπεριφοράς)
- (5) Ποιότητα υλικού → τι “αντέχει”; (ΜΑΘ.: σταθερότητα / ευαισθησία σε μικρές μεταβολές)
- (6) Αξία χρήσης → τι πληροφορία μου δίνει; (ΜΑΘ.: τι συμπέρασμα μπορώ να βγάλω χωρίς να λύσω εξίσωση)

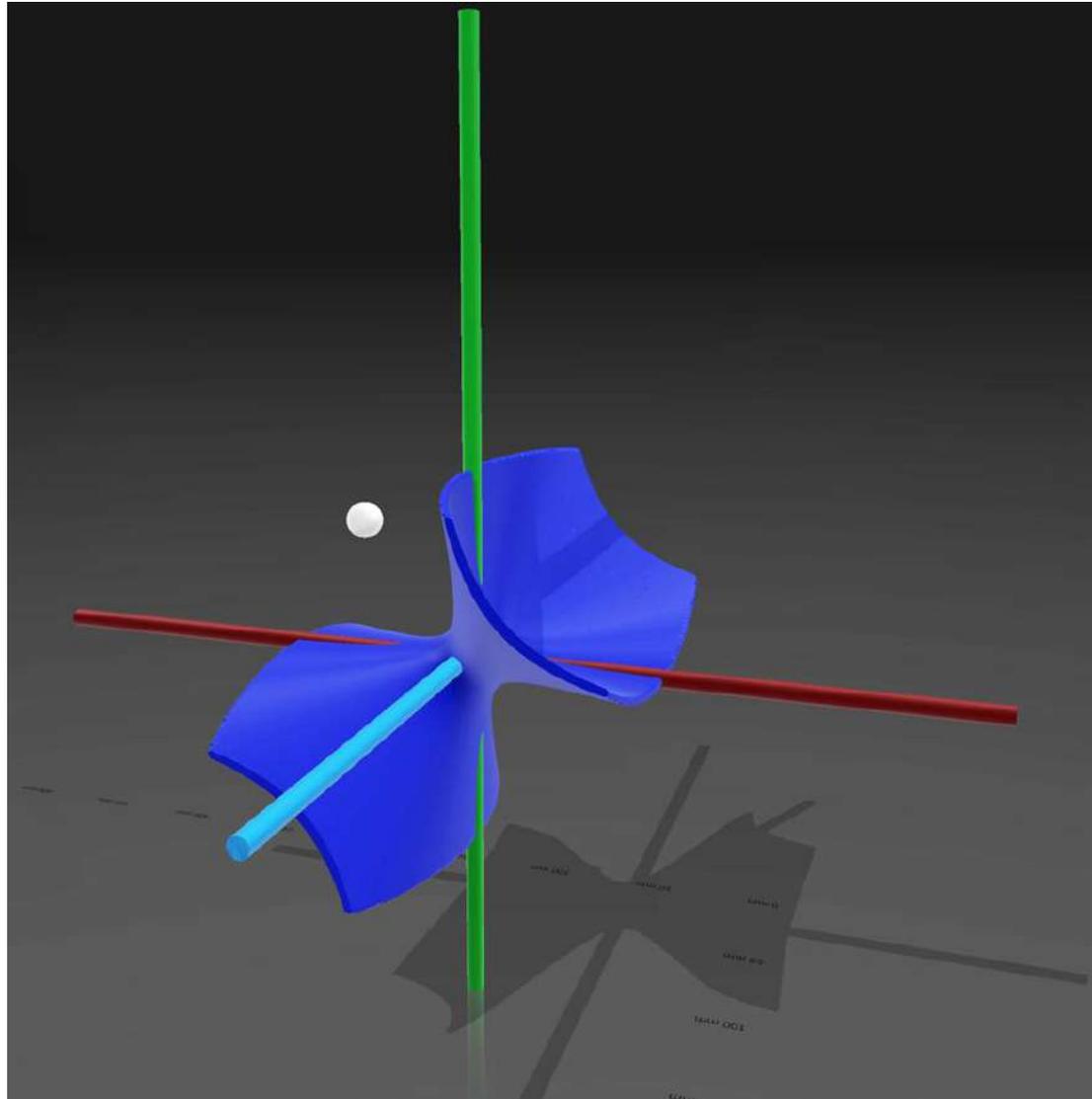
2. “Μέσα–πάνω–έξω”: διαισθητική κατανόηση του συνόρου



- Τι σημαίνει “πάνω” (σύνоро), “μέσα” και “έξω” (οι δύο πλευρές).
- Διαισθητικό κριτήριο: “μέσα = πλευρά που περιέχει τον άξονα συμμετρίας”.
- Πρώτη ιδέα: αυτό αντιστοιχεί σε μια ανισότητα (<0 / >0).



3. Υπόθεση σχέσης με σχολικά μαθηματικά

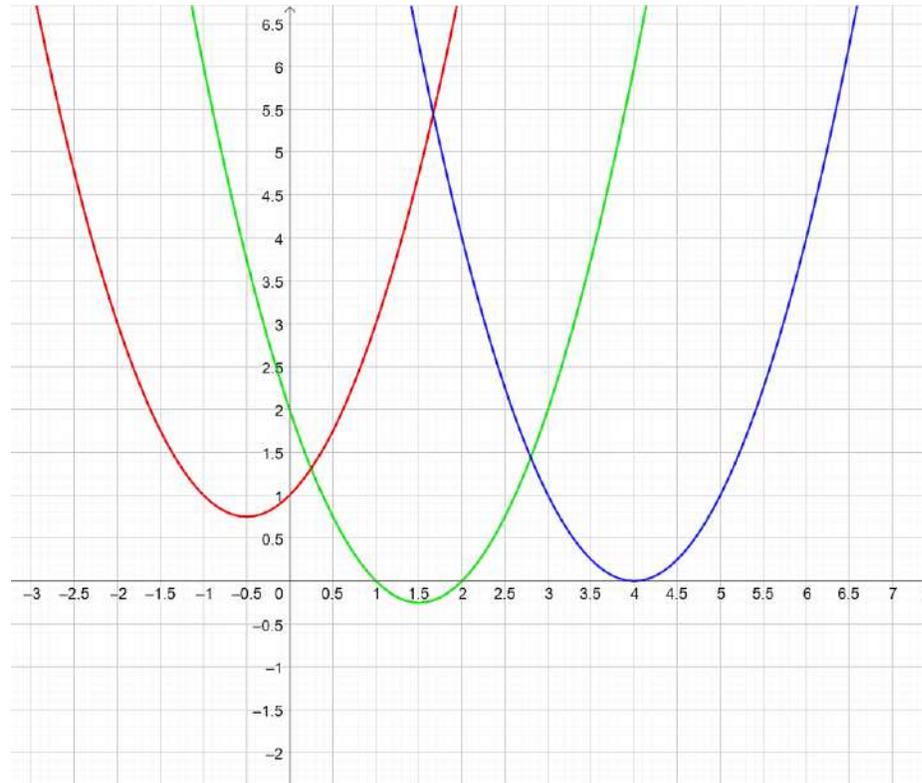
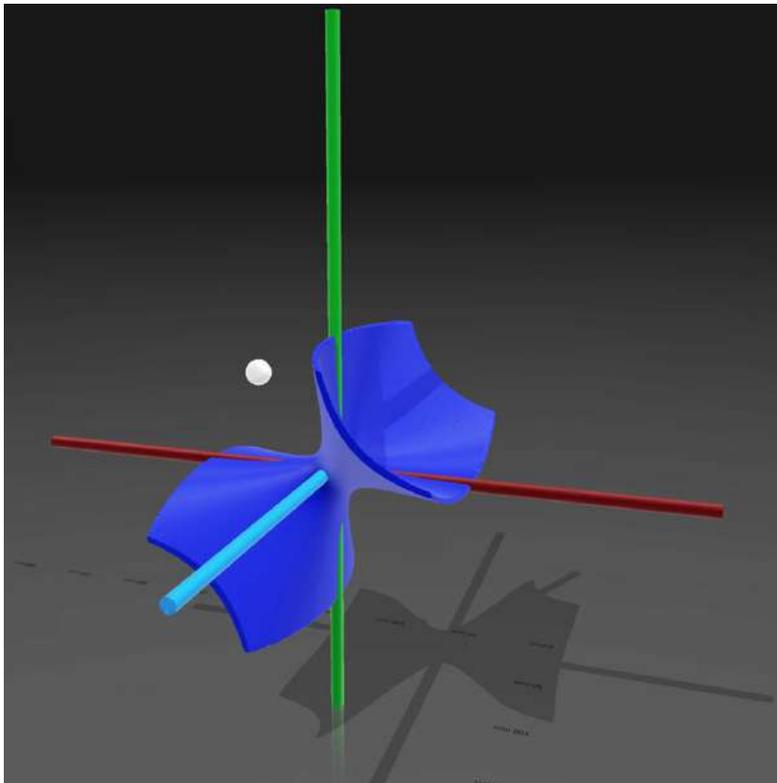


Τι είδους μαθηματικά “ταιριάζουν” σε ένα σύνορο που χωρίζει χώρο σε δύο περιοχές;

Υποθέσεις μορφής:

- “κάτι = 0 στο σύνορο”,
- “κάτι που αλλάζει πρόσημο μέσα/έξω”.

4. Σύνδεση με τριώνυμο 2ου βαθμού

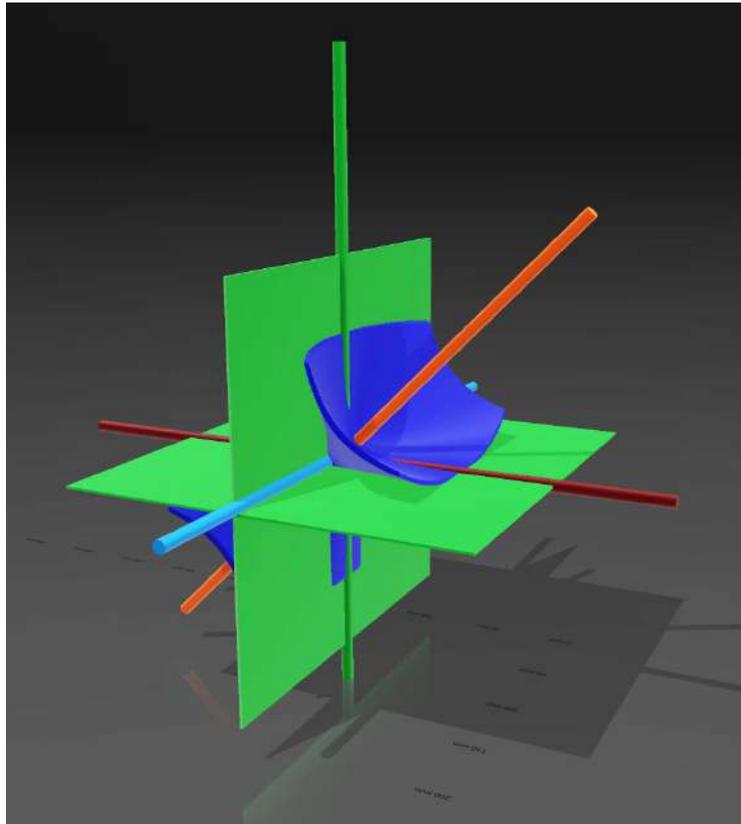
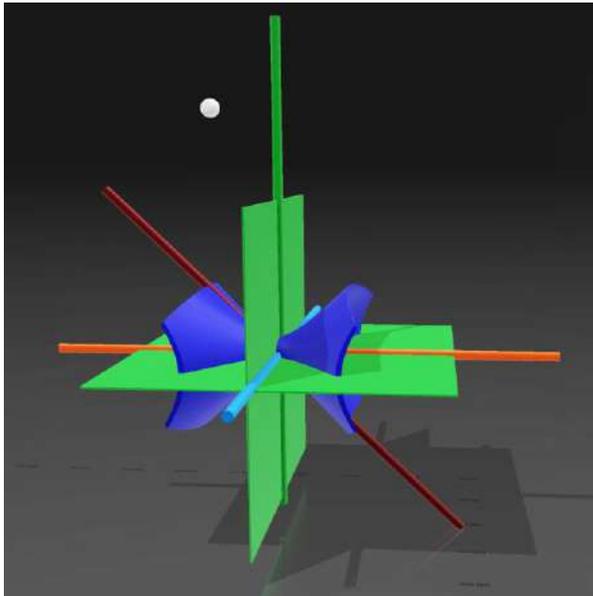
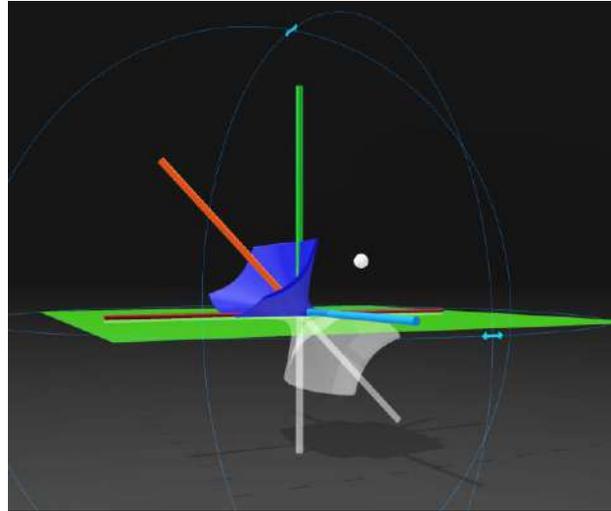


Δίνεται/υπενθυμίζεται:

$$P(x)=ax^2+bx+c$$

Ερώτημα: υπάρχει “λογικός δρόμος” ο οποίος να συσχετίζει την “αλλαγή περιοχής” με την αλλαγή συμπεριφοράς του τριωνύμου όπως την έχετε γνωρίσει;

5. Υπόθεση: το αντικείμενο ως “χώρος συντελεστών” (a, b, c)



- Εικασία ότι οι άξονες είναι οι συντελεστές (a, b, c).
- Πρόταση πιθανών σχέσεων/μορφών (π.χ. “τετράγωνο = γινόμενο”, “έκφραση = 0”).

6. Εισαγωγή Τεχνητής Νοημοσύνης



Προτροπή A (χωρίς διακρίνουσα):
περιγραφή/υποθέσεις/έλεγχοι.

«Έχω ένα 3D αντικείμενο όπως αυτό που σου δείχνω και το οποίο μοιάζει να είναι σύνορο που χωρίζει τον χώρο σε “μέσα” και “έξω”.

1) Περιέγραψέ το με απλές έννοιες: συμμετρία, τομές, μέσα/έξω/πάνω.

2) Πρότεινε 2–3 πιθανούς τύπους σχέσεων ανάμεσα σε τρεις αριθμούς (a,b,c) που θα μπορούσαν να ορίζουν ένα τέτοιο σύνορο.

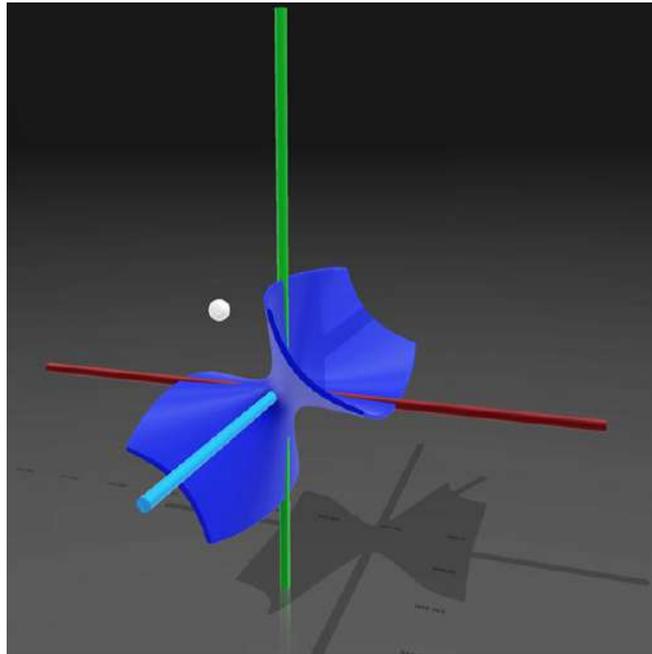
3) Πρότεινε 2 μικρούς ελέγχους/δοκιμές (τι τιμές να δοκιμάσω) για να ξεχωρίσω ποια υπόθεση είναι σωστή.

Μην χρησιμοποιήσεις προχωρημένη ορολογία.»

+ Ask anything



7. Εισαγωγή Τεχνητής Νοημοσύνης



Προτροπή Β (με πλαίσιο τριωνύμου): Δ , σύνορο, μέσα/πάνω/έξω, παραδείγματα.

«**Θεώρησε ότι οι άξονες αντιστοιχούν στους συντελεστές (a, b, c) του τριωνύμου $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).**

- 1) Ποια γνωστή ποσότητα συνδυάζει τα a, b, c και σχετίζεται με το πλήθος πραγματικών ριζών;
- 2) Ποιο είναι το σύνορο (εξίσωση) που αντιστοιχεί στην οριακή περίπτωση;
- 3) Εξήγησε χωρίς τύπο ριζών γιατί αυτό είναι σύνορο ανάμεσα σε 0 και 2 πραγματικές ρίζες, χρησιμοποιώντας: διαμερισμός, οριακή κατάσταση, διπλή ρίζα.
- 4) Δώσε 3 τριώνυμα: ένα με $\Delta < 0$, ένα με $\Delta = 0$, ένα με $\Delta > 0$, και πες αν είναι μέσα/πάνω/έξω.»

+ Ask anything



8. Σύγκριση & τελική σύνθεση

Κριτήριο	Απάντηση ομάδας	Απάντηση TN
Περιγραφή αντικειμένου (συμμετρία/τομές/μέσα-έξω)		
Κεντρική υπόθεση για σχέση σε (a,b,c)		
Προτεινόμενοι έλεγχοι/δοκιμές		
Σαφήνεια επιχειρηματολογίας		
Τι λείπει / τι χρειάζεται διόρθωση		

- Σύγκριση απαντήσεων **Ομάδων vs TN**.
- Συγγραφή αναφοράς/παρουσίασης έρευνας (δομή: **ερώτημα-υποθέσεις-έλεγχος-συμπέρασμα-αναστοχασμός TN**).

Εφαρμογή, Μαθηματικά και Εγκέφαλος

Στάδιο	Δράση μαθητών	Εγκέφαλος (στόχος)	Έξοδος
1. 3D Παρατήρηση	Συμμετρίες • άξονες/επίπεδα • origin • τομές	Αισθήσεις-κίνηση / χώρος	Περιγραφή + σκαρίφημα
2. Κίνητρο & Ασφάλεια	"Καλή υπόθεση + έλεγχος" (όχι σωστό/λάθος) • ρόλοι ομάδας	Συναίσθημα/κίνητρο (περιέργεια, χαμηλό άγχος)	Κλίμα έρευνας + κανόνες
3. Μέσα-Πάνω-Έξω → Κανόνας	Σύνоро: $F=0$ • πλευρές: $F<0/F>0$	Λογική/έλεγχος	Κριτήριο + ανισότητες
4. Σύνδεση με τριώνυμο	$P(x) = ax^2 + bx + c$: "2 κατηγορίες + οριακή"	Μετωπο-βρεγματική συνεργασία	Υπόθεση: οριακή ↔ σύνоро
5. TN → Σύγκριση → Σύνθεση	Προτροπή A (υποθέσεις/έλεγχοι) • B (Δ , $\Delta = 0$, παραδείγματα) • τελική αναφορά	TN για τεκμηρίωση + μετα-γνώση	Παρουσίαση έρευνας

Στάδιο	Τι κάνουν οι μαθητές (δράση)	"Εγκέφαλος" που στοχεύουμε	Παραδοτέο / Έξοδος
1. 3D Παρατήρηση	Περιγράφουν το αντικείμενο "στο χέρι": συμμετρίες, άξονας/επίπεδα, origin. Προβλέπουν τομές.	Αισθήσεις-Κίνηση + Χωρική αντίληψη	Σύντομη περιγραφή + σκαρίφημα αξόνων/origin + 2 προβλέψεις τομών
2. Μέσα-Πάνω-Έξω	Ορίζουν διαισθητικά "πάνω/μέσα/έξω" και επιλέγουν κριτήριο ("μέσα = πλευρά με τον άξονα συμμετρίας").	Συναισθηματική ασφάλεια + Περιέργεια (χαμηλό άγχος)	Λεκτικός ορισμός μέσα/πάνω/έξω + κριτήριο
3. Μετάφραση σε Μαθηματικά	Διατυπώνουν: σύνоро \Rightarrow υπάρχει $F(a, b, c)$ με $F = 0$, και πλευρές $F < 0 / F > 0$. Προτείνουν 2 υποθέσεις για τη μορφή του F .	Λογική/Έλεγχος (εκτελεστικές λειτουργίες)	2 υποθέσεις για F + 2 προτεινόμενοι έλεγχοι
4. Σύνδεση με τριώνυμο	Συνδέουν με $P(x) = ax^2 + bx + c$: "δύο κατηγορίες + οριακή".	Μετωπο-βρεγματική συνεργασία (νόημα + στρατηγική)	Πρόβλεψη: ποια "ποσότητα" παίζει ρόλο + τι σημαίνει οριακή
5. TN – Προτροπή A	Ζητούν από TN: περιγραφή, 2-3 μορφές σχέσεων, 2 έλεγχοι. (Χωρίς να αναφερθεί Δ).	TN ως "γεννήτρια ελέγχων"	Λίστα υποθέσεων/ελέγχων για δοκιμή
6. TN – Προτροπή B	Δίνουν πλαίσιο τριωνύμου: διακρίνουσα, σύνоро $\Delta = 0$, ερμηνεία χωρίς τύπο ριζών, παραδείγματα μέσα/πάνω/έξω.	Τεκμηρίωση & καθαρή διατύπωση	Σωστή μαθηματική διατύπωση + 3 παραδείγματα ταξινόμησης
7. Σύγκριση & Σύνθεση	Συγκρίνουν ανθρώπινη πορεία vs TN. Γράφουν ολοκληρωμένη παρουσίαση έρευνας.	Μετα-γνώση (κριτική αξιολόγηση)	Τελική αναφορά/παρουσίαση: ερώτημα \rightarrow υποθέσεις \rightarrow έλεγχοι \rightarrow συμπέρασμα

Από «Διαχειριστής ύλης» σε «Δημιουργός γνώσης»

Διαχειριστής ύλης (λογική κάλυψης)

Δημιουργός γνώσης (λογική σχεδιασμού)

«Είναι δύσκολο» = δεν ταιριάζει σε τυπική άσκηση/
αλγόριθμο

«Είναι δύσκολο» = ευκαιρία για κλιμάκωση & έρευνα

Στόχος: σωστό αποτέλεσμα, γρήγορη εκτέλεση

Στόχος: υπόθεση → έλεγχος → τεκμηρίωση → συμπέρασμα

Δυσκολία = εμπόδιο/κίνδυνος αποτυχίας

Δυσκολία = "σκαλωσιά" (levels, ρόλοι, παραδείγματα)

Αξιολόγηση: τελική απάντηση

Αξιολόγηση: ποιότητα ελέγχων, επιχειρηματολογία,
παρουσίαση

TN = φόβος αντιγραφής/"λύτης"

TN = βοηθός ελέγχων & επιμέλειας τεκμηρίωσης (όχι
λύτης)

Δεν ζητάμε όλοι να φτάσουν στο ίδιο βάθος, ζητάμε όλοι να μπουν σε διαδικασία έρευνας.

**Χωρίς ασφαλές κλίμα, ο μαθητής ζητά
“σωστή απάντηση”.**

**Με ασφαλές κλίμα, παράγει υπόθεση και
έλεγχο.**

Βιβλιογραφία

1. Μετωπο-βρεγματικά δίκτυα & ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων

- Menon, V. (2021). *Development of distributed brain networks that support multiple aspects of math* (systems neuroscience review).
- Peters, L., & συν. (2017). *Arithmetic in the developing brain: A review* (ανασκόπηση μάθησης αριθμητικής).

2. Βρεγματικός πυρήνας “ποσότητας/αριθμητικού νοήματος” (IPS) & κατανεμημένη αρχιτεκτονική

- Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (2003). *Three parietal circuits for number processing* (κλασικό άρθρο για βρεγματικά κυκλώματα αριθμού).
- Dehaene, S. (2009). *Origins of Mathematical Intuitions* (IPS ως βασικό σύστημα αριθμητικότητας/νοηματοδότησης αριθμών).
- Nieder, A., & Dehaene, S. (2009). *Representation of Number in the Brain* (εκτενής ανασκόπηση).

3. “Αριθμητικά facts” & γωνιώδης έλικα (retrieval vs calculation)

- Grabner, R. H., Ansari, D., Reishofer, G., et al. (2009). *To retrieve or to calculate? Left angular gyrus mediates the retrieval of arithmetic facts...*
- Grabner, R. H. (2013). *The function of the left angular gyrus in mental arithmetic* (συνοπτική θεωρητική/ερευνητική επισκόπηση).

4. Math anxiety ως “ρυθμιστής απόδοσης” (anticipation networks)

- Lyons, I. M., & Beilock, S. L. (2012). *When Math Hurts: Math Anxiety Predicts Pain Network Activation in Anticipation of Doing Math* (ισχυρή fMRI ένδειξη για ρόλο προσμονής/απειλής).
- Lyons, I. M., & Beilock, S. L. (2012). *Mathematics anxiety: separating the math from the anxiety* (συζήτηση/διάκριση προσμονής vs εκτέλεσης).

Σας Ευχαριστώ.